

# 50 Ejercicios de Ajedrez y Matemáticas para las Escuelas

Un enfoque basado en el juego (ajedrez) para resolver problemas



Erasmus+ Contract No. 2017-1-SK01-KA201-035424  
with EU financial support.





# INTRODUCCIÓN

Este libro proporciona material que facilita el enlace del ajedrez con las matemáticas en la clase. Hemos probado todos estos ejercicios y hemos comprobado que a la mayoría de los alumnos les entusiasma, a veces incluso más que a sus maestros. El ajedrez es un juego de mesa clásico que los niños y niñas lo disfrutaban a todos los niveles. Utilizamos el tablero y las piezas de ajedrez para transmitir información matemática coherente con el programa de la escuela primaria (es decir, niños y niñas de 6 a 11 años) de matemáticas de la mayoría de países. Solo es necesario un conocimiento básico de ajedrez: como se mueven las piezas. No es necesario ser un jugador de ajedrez para utilizar este libro. El objetivo principal es la resolución de problemas.

Los 50 ejercicios se clasifican según la edad y su agrupación más natural: individuos, parejas, dobles parejas, grupos o toda la clase. También se indica el tema del programa de matemáticas. La mayoría de los ejercicios tienen preguntas preliminares y distintas extensiones. Resolver los ejercicios normalmente no debería durar más de una sesión de clase. Los materiales necesarios son mínimos. Se pueden utilizar juegos de ajedrez, pero los ejercicios también son posibles con cuadrados de 8x8 y tableros de colores o señales. Imprimir posiciones del tablero es útil para realizar diversos ejercicios.

Aconsejamos trabajar el libro al ritmo de los alumnos. Algunos alumnos superan claramente el nivel de edad indicado. La resolución de problemas requiere persistencia. Se pide a los alumnos que realicen una tarea o una investigación o que jueguen a un juego. A menudo se dan consejos para superar los obstáculos intelectuales. Se proporciona un método de solución para cada problema, pero siempre hay más de uno y habría que animar a los niños y niñas a pensar por sí mismos. El profesor puede desarrollar sus propios ejercicios preliminares y de ampliación para adaptarse a la capacidad de los alumnos. Los ejercicios posteriores requieren un nivel más elevado de abstracción y las soluciones son susceptibles de error por lo que se requiere más intervención del profesorado.

Los juegos matemáticos son simples y fáciles de jugar. Ilustran algunos conceptos fundamentales como la paridad y la simetría. Lo importante de estos juegos no es ganar sino comprender los conceptos subyacentes. Los niños y niñas son felices al descubrir que muchos de estos juegos se pueden ganar reconociendo que hay un patrón subyacente. Esto forma parte de la constatación que la matemática proporciona un patrón subyacente a las leyes científicas. Desde una perspectiva didáctica, los alumnos están contentos al aprender "trucos" para ganar un juego o resolver un rompecabezas.

Estos ejercicios se basan en fuentes tradicionales y se complementan con algunos ejercicios originales de los autores. Muchos de los ejercicios serán nuevos para los matemáticos recreativos. Lo que los distingue es que se desarrollan dentro de un dominio restringido del tablero para crear un sentido tanto de familiaridad como de accesibilidad.

El plan de estudios de referencia de la escuela primaria es el de Singapur porque se considera que está cerca de la metodología de resolución de problemas promovida por este proyecto. El "método" de Singapur ha alcanzado una amplia atención internacional después de su éxito en los "rankings" de Pisa de la OCDE. El plan de estudios de la escuela primaria es coherente con los de Europa, como han validado los expertos en docencia del proyecto. Además de matemáticas, muchos de estos ejercicios incorporan algunos principios de la teoría de juegos que, aunque normalmente no se enseñan en la escuela primaria, son compatibles con la capacidad de la mayoría de niños y niñas.

Creemos que el mayor valor al trabajar con estos ejercicios reside en la estructura de los problemas. Es un placer resolver un problema bien estructurado. Recomendamos a los profesores que desarrollen i amplíen estos ejercicios y compartan sus experiencias en la clase.

Este proyecto ha sido financiado a través de ErasmusPlus de la Unión Europea. Los socios del proyecto han sido la Federación Eslovaca de Ajedrez (coordinador), Ajedrez en las Escuelas y las Comunidades (Reino Unido), Ludus (Portugal), la Universitat de Girona (España) y la Escuela Veľká Ida de Eslovaquia. También han colaborado en el proyecto Carlos Santos, Carme Saurina Canals, Josep Serra, Mark Szavin, Stefan Löffler, Alessandro Dominici, Malcolm Pein, Chris Fegan, Zdenek Gregor, Eva Repkova, Vladimir Szucs, Viera Klebuskova, Niki Vrbova i Viera Harastova. El responsable del proyecto ha sido Stefan Marsina. Las fotos de la clase son de Viera Harastova. Las imágenes del tablero de ajedrez se han realizado utilizando el Tablero de la Lógica de LearningChess.com (Hungría).

John Foley  
Rita Atkins  
Carlos Santos  
Viera Harastova

Marzo 2019

*©Copyright de los autores.*

*Este trabajo esta bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. Consultar <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>*

*Los docentes pueden utilizar, reutilizar, adaptar y compartir este material de manera no comercial siempre que se dé la atribución a los autores.*

## LOS 50 EJERCICIOS

PÀGINA

1.	CADA CASILLA TIENE UN NOMBRE	INDIVIDUAL	1	6
2.	IDENTIFICA EL COLOR DE LA CASILLA	GRUPO CLASE	2	
3.	CATEGORÍA DE LAS PIEZAS	GRUPO	3	
4.	CRUZAR LA LÍNEA	PAREJA	4	
5.	EL JUEGO DE OPOSICIÓN DIAGONAL	PAREJA	5	
6.	ARITMÉTICA CON EL AJEDREZ	INDIVIDUAL	6	
7.	PUZLE DE CUATRO TORRES	PAREJA	7	7
8.	LAS PIEZAS CAÍDAS	DOS PAREJAS	8	
9.	PUZLE DE ATAQUE A LA ESQUINA	DOS PAREJAS	9	
10.	EL PODER DE LA PIEZA	DOS PAREJAS	10	
11.	EVITAR TRES EN UNA LÍNEA	INDIVIDUAL	11	8
12.	PIEZAS EN UNA LÍNEA [11]	PAREJA	12	
13.	EL JUEGO DE WYTHOFF [Q]	PAREJA	13	
14.	EL PUZZLE DE TORRE EN LA ESQUINA	PAREJA	14	
15.	EL RECORRIDO MÁS CORTO DE TORRE	INDIVIDUAL	15	
16.	CARRERA HACIA LA ESQUINA [TORRE]	PAREJA	16	
17.	RECORTAR	PAREJA	17	
18.	ARMY POWER PUZZLE	PAREJA	18	
19.	MÁXIMO NÚMERO DE CABALLOS	PAREJA	19	
20.	PIEZA MISTERIOSA	PAREJA	20	
21.	POSICIÓN LÓGICA	PAREJA	21	
22.	FICHAS EN UNA LÍNEA [16]	PAREJA	22	9
23.	MAPA DE MOVIMIENTOS MÍNIMOS	PAREJA	23	
24.	¿CUANTOS CAMINOS ? [PEÓN]	PAREJA	24	
25.	EL PEÓN LIGERO	PAREJA	25	
26.	EL JUEGO DE WYTHOFF [QQ]	PAREJA	26	
27.	EL ROMPECABEZAS DE DOMINÓ	PAREJA	27	
28.	EL ROMPECABEZAS DE TROMINÓ	PAREJA	28	
29.	PUZZLE DE DOS DAMAS	DOS PAREJAS	29	
30.	JAQUE MATE EQUIDISTANTE	PAREJA	30	
31.	EL JUEGO DE LA RESTA	PAREJA	31	
32.	NIM	PAREJA	32	
33.	JUEGO DE MONEDAS DE ORO	PAREJA	33	10
34.	JUEGO DE NORTHCOTT	PAREJA	34	
35.	JUEGO DE TORRES DESLIZANTES	PAREJA	35	
36.	¿CUÁNTAS RUTAS? [TORRE]	PAREJA	36	
37.	PASEO TORRE POR EL TABLERO MUTILADO	PAREJA	37	
38.	PUZZLE ZIGZAG CON EL ALFIL	PAREJA	38	
39.	PUZZLE DE CINCO DAMAS	DOS PAREJAS	39	
40.	DIVIDIENDO EL TABLERO	INDIVIDUAL	40	
41.	EMBALDOSAR EL TABLERO	INDIVIDUAL	41	
42.	PROBLEMA DE LOS DOCE CABALLOS	PAREJA	42	
43.	PUZZLE DE OCHO DAMAS	PAREJA	43	
44.	¿CUÁNTOS CUADRADOS EN UN TABLERO?	PAREJA	44	11
45.	PUZZLE DE PUNTUACIÓN DEL TORNEO	INDIVIDUAL	45	
46.	PASEO ALEATORIO DEL REY	PAREJA	46	
47.	CAMINATA ALEATORIA DEL REY	PAREJA	47	
48.	LA INVENCION DEL AJEDREZ	GRUPO	48	
49.	¿CUÁNTOS RECTÁNGULOS EN EL TABLERO?	GRUPO	49	
50.	LEAPER PROBLEM	PAREJA	50	



# TEMAS MATEMÁTICOS

1. COORDENADAS, POSICIONES, MOVIMIENTOS, LÁPIZ
2. PARIDAD, VISUALIZACIÓN, LÁPIZ
3. PATRONES, ORDENACIÓN, ÓRDENES, SECUENCIAS, SIMETRÍAS
4. PARIDAD, SIMETRÍA
5. PARIDAD, SIMETRÍA
6. ARITMÉTICA, SÍMBOLOS, ECUACIONES, LÁPIZ
7. GEOMETRÍA, NOCIONES ESPACIALES, ENUMERACIÓN, INTERSECCIÓN
8. ENUMERACIÓN, PRINCIPIO DE DIRICHLET O DEL PALOMAR, MÁXIMO/MÍNIMO
9. ARITMÉTICA, PRUEBA Y ERROR, INPUT/OUTPUT
10. ENUMERACIÓN, SIMETRÍA
11. GEOMETRÍA, LÍNEAS RECTAS, PENDIENTE, REGLA
12. GEOMETRÍA, LÍNEAS RECTAS, PENDIENTE, REGLA, LÁPIZ
13. TRABAJAR HACIA ATRÁS A PARTIR DEL OBJETIVO
14. PARIDAD, LÁPIZ
15. ENUMERACIÓN
16. SIMETRÍA
17. FORMAS, SIMETRÍA
18. ENUMERACIÓN, DIAGRAMAS DE VENN, PRUEBA Y ERROR
19. ENUMERACIÓN, PARIDAD
20. PROPIEDADES DISJUNTAS, UNIÓN, SIMETRÍA
21. LÓGICA
22. LÍNEAS RECTAS, PENDIENTES, PRUEBA Y ERROR
23. ENUMERACIÓN, NOCIONES ESPACIALES
24. ENUMERACIÓN, NOCIONES ESPACIALES
25. LÓGICA, INFORMACIÓN, DIAGRAMAS EN ÁRBOL
26. SIMETRÍA, TRABAJAR HACIA ATRÁS A PARTIR DEL OBJETIVO
27. FORMAS, PARIDAD
28. PRUEBA Y ERROR, SIMETRÍA, MÚLTIPLOS, DIVIDIR PARA GANAR
29. ENUMERACION, PRUEBA Y ERROR
30. GEOMETRÍA, MEDIDAS DE DISTANCIA, APRENDIZAJE ENTRE COMPAÑEROS
31. SIMETRÍA, MÚLTIPLOS
32. SIMETRÍA, MÚLTIPLOS, POTENCIAS
33. SIMETRÍA, MÚLTIPLOS, DIAGRAMAS EN ÁRBOL, TRABAJAR HACIA ATRÁS
34. SIMETRÍA, REPRESENTACIÓN
35. SIMETRÍA, PARIDAD, TRABAJAR HACIA ATRÁS
36. ENUMERACIÓN, TRIÁNGULO DE PASCAL
37. SIMETRÍA, ELIMINACIÓN
38. ENUMERACIÓN, TRIÁNGULO DE PASCAL
39. ENUMERACIÓN, TRIÁNGULO DE PASCAL
40. DESCOMPOSICIÓN DE FORMAS, PRUEBA Y ERROR
41. DESCOMPOSICIÓN DE FORMAS, ENUMERACIÓN, PRUEBA Y ERROR, MEDIDAS DE ÁREA, NÚMEROS CUADRADOS
42. ENUMERACIÓN, PRUEBA Y ERROR
43. ENUMERACIÓN, PRUEBA Y ERROR
44. ENUMERACIÓN, FORMAS, ARITMÉTICA, ORGANIZANDO LA INFORMACIÓN EN FICHAS
45. LÓGICA, ORGANIZANDO LA INFORMACIÓN EN FICHAS
46. ENUMERACIÓN, PRUEBA Y ERROR, SIMETRÍA
47. ENUMERACIÓN, PROPORCIÓN, ORGANIZANDO LA INFORMACIÓN EN FICHAS
48. CRECIMIENTO EXPONENCIAL, SECUENCIA GEOMÉTRICA
49. ENUMERACIÓN, FORMAS, ORGANIZANDO LA INFORMACIÓN EN FICHAS
50. ENUMERACIÓN, SIMETRÍA, ÁNGULOS



## 1. Cada casilla tiene un nombre

Individual

Edad 6+ | Coordinadas, posiciones, movimientos, lápiz

Este ejercicio es básico para entender la ubicación en el tablero.

### Ejercicio práctico

Explicar que cada casilla se conoce por sus coordenadas: columna-letra y fila-número. Ejemplo b3 en la Imagen 1: Andad por la calle (b) hasta la casa número 3.

Para los alumnos pequeños, dibujar una línea desde la casilla hasta sus coordenadas.

Repartir papeles con la impresión de un tablero de ajedrez. Utilizar lápiz.

Tarea: escribir el nombre de cada casilla del tablero.

### Juegos

- El profesor dicta nombres de casillas y pide a la clase que le ponga una pieza (al principio no es fácil).
- Dibuja la ruta (p. ej. a1-a5)
- Haz un movimiento (p. ej., c8-h3) y pide a la clase las coordenadas
- Coloca una torre en a1 y pregunta a la clase con se puede llegar a f5
- Dibuja un laberinto en el tablero y pregunta las coordenadas de la ruta de salida
- Utilizando las cintas de velcro, haz que los alumnos coloquen piezas en las casillas con solo tocarlas.

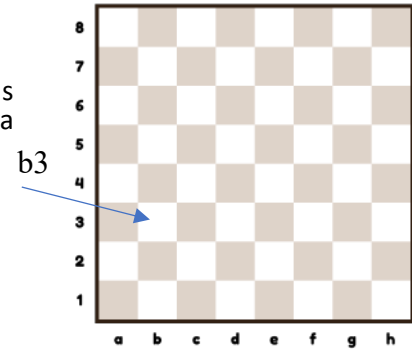


Imagen 1: Tablero



Cita las casillas con una cinta

## 2. Identifica el color de la casilla

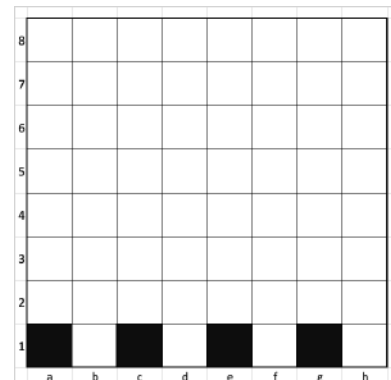
Grupo Clase

Edad 6+ Paridad, Visualización, lápiz

Dar una hoja con solo la primera fila pintada.

Explicar los colores alternativos.

**Tarea:** completa todo el tablero.



### Ejercicio en la clase

El maestro está delante de un tablero vacío y pide a sus alumnos que digan una casilla. El profesor identifica el color de la casilla, por ejemplo, c4 es blanca. Repetirlo con los alumnos

**Discusión en la clase:** ¿Qué métodos podemos utilizar para obtener la respuesta?

Posibles métodos:

- Patrón de la serpiente:** a1 = negra, b1 = blanca, c1 = negra, ... h1 = blanca, h2 = negra, g2 = blanca, etc.
- Diagonales:** Las diagonales largas (Negra a1-h8; Blanca a8-h1) viajan a través del tablero. Buscar el cuadrado más cercano al que necesitéis i ajustad-lo al color en consecuencia.
- Paridad** (edad 11+) Cambiamos el nombre de las filas a, b, c ... por 1, 2, 3 y modificamos las coordenadas de la casilla buscada. Si la suma es par, entonces la casilla es negra.

### Extensión

Visualización (8+ años)

Los alumnos cierran los ojos y levantan la mano derecha si la casilla es blanca o la mano izquierda si la casilla es negra.

Foto: alumnos que responden c4



### 3. Categoría de las Piezas

Grupo

Edad 6+ Patrones, ordenación, orden, secuencias, lápiz

Ejercicio práctico

Enseñar a la clase que los peones son todos de la misma medida y más pequeños que las otras piezas. Observar que la medida de las piezas va disminuyendo si nos vamos acercando a la esquina.

♔ = ♚ > ♖ > ♗ > ♘

Tareas a realizar:

- Encontrar cinco formas de clasificar las piezas de ajedrez, por ejemplo, según el color, si saltan o no, etc
- Encontrar cinco formas de ordenar las piezas de ajedrez, por ejemplo, según su valor, la medida de su base, etc

#### Extensión

El profesor enseña a sus alumnos grupos de piezas y pide a la clase que explique el principio d'agrupación

#### Metodo de solución

Interesa una combinación de enfoques para generar ideas

- Comparar y contrastar dos clases de piezas
- Discutir como una tercera clase de piezas difiere de las otras
- Analizar las piezas individualmente, en su posición inicial o durante el juego

#### Respuesta

Clasificación

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> Color de la pieza                                | <input type="checkbox"/> Luminoso o suave             |
| <input type="checkbox"/> Puede/no puede moverse desde su posición inicial | <input type="checkbox"/> Peones o piezas              |
| <input type="checkbox"/> Color de la casilla que ocupa inicialmente       | <input type="checkbox"/> Más grande o más pequeña     |
| <input type="checkbox"/> Recorrido largo / recorrido corto                | <input type="checkbox"/> Deslizaderas / Saltadoras    |
|   | <input type="checkbox"/> Si pueden ponerse boca abajo |

Orden

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Altura                         | <input type="checkbox"/> Ir más rápido hasta el otro lado del tablero desde su posición inicial desbloqueada |
| <input type="checkbox"/> Diámetro de la base            | <input type="checkbox"/> Alfabético (depende de la lengua)   |
| <input type="checkbox"/> Valor de cambio                | <input type="checkbox"/> Número de piezas que se pueden poner en una casilla                                 |
| <input type="checkbox"/> Número de piezas de cada clase |  |

Soluciones realizadas por alumnos:



## 4. Cruzar la Línea

Pareja

Edad 6+ Paridad, simetría

Colocar los dos reyes en sus casillas iniciales. Los reyes se mueven como en el ajedrez. El blanco mueve primero. ¿Quién gana – el primer jugador o el segundo – en cada una de estas posiciones?

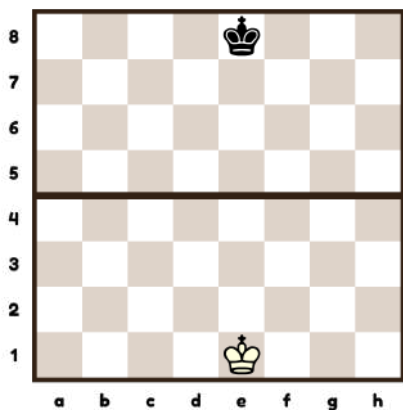


Imagen 4(a) El primer jugador que pase la línea es el ganador

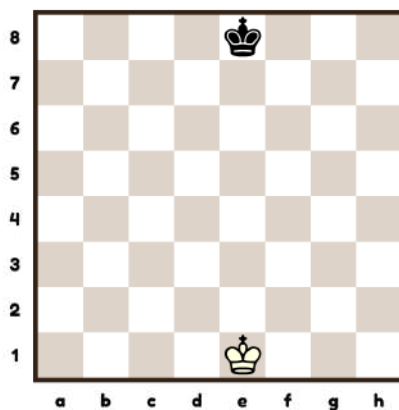


Imagen 4(b) Gana el primero que llegue a la fila 8 / 1

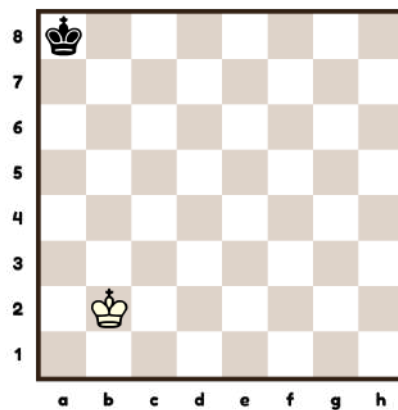


Imagen 4(c) El negro juega para evitar que el blanco llegue a la fila 8

### Estrategia de juego

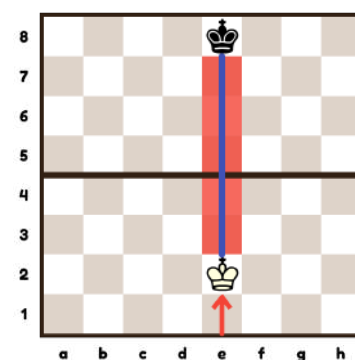
Este juego se basa en el concepto de Oposición del ajedrez. Una oposición directa se produce en el tablero cuando los dos reyes están uno frente al otro separados tan solo por una casilla. La oposición a distancia se produce cuando los dos reyes se miran mutuamente i están separados un número impar (>1) de casillas. Por lo tanto este juego está directamente relacionado con los conceptos de paridad y simetría.

### Respuestas

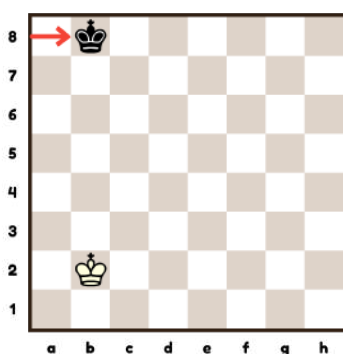
4(a) Si el blanco juega primero 1. ♔e2, hace el movimiento ganador. observamos la línea azul, el negro será el primero en tener que escoger un lado, dejando el camino abierto para que el blanco elija el otro. Si el negro quiere mantenerse en la línea azul, el hecho que haya un número impar de casillas entre los reyes es el factor determinante para que gane el blanco.

4(b) El mejor movimiento es el mismo que en el 4(a)

4(c) El negro gana manteniendo la oposición alejada con 1.. ♚b8



4(a) i 4(b) El mejor movimiento del blanco



## 5. El juego de Oposición Diagonal

Pareja

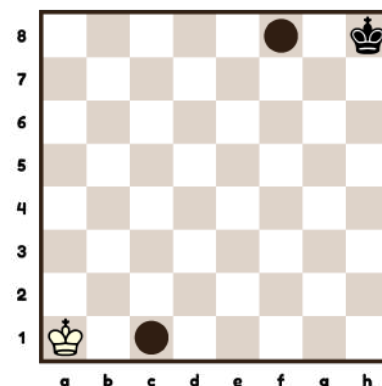
Edad 6+ Paridad, simetría

Colocar los reyes en dos esquinas diametralmente opuestas.

Los reyes se mueven como en el ajedrez. El blanco mueve primero.

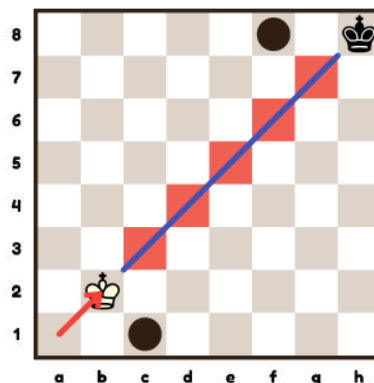
El primer jugador que ocupe la casilla de inicio del rey contrario o la casilla marcada en el otro lado, gana.

¿Quién gana el primer jugador o el segundo?



### Estrategia de juego

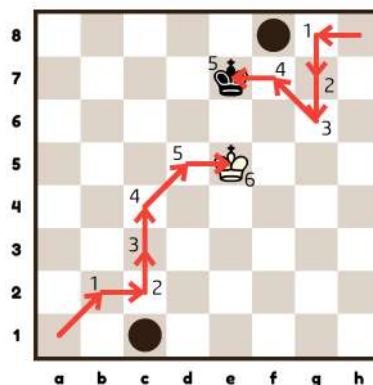
La oposición a lo largo de una diagonal (en lugar de una fila o columna) se llama oposición diagonal. Este concepto es la idea principal de este juego.



### Respuesta

1.Rb2 es la jugada ganadora. Si observamos la línea azul, al avanzar, el negro será el primero en elegir un lado, dejando el camino abierto para que el blanco lo elija.

Hay que tener presente que, en algún momento, la oposición diagonal se puede convertir en oposición directa. En consecuencia, el alumno puede utilizar los conocimientos adquiridos previamente en una nueva situación, un tema importante en matemáticas.



## 6. Aritmética con el ajedrez

Individual

Edad 7+ | Aritmética, símbolos, ecuaciones, lápiz

Explicar el valor convencional de puntos de cada pieza.

Explicar:  $\text{Reina} = \text{Alfil} + \text{Caballo} + \text{Peón}$  porque  $9 = 5 + 3 + 1$

$$\text{Reina} = 9$$

$$\text{Alfil} = 5$$

$$\text{Caballo} = 3$$

$$\text{Peón} = 3$$

$$\text{Peón} = 1$$

Tareas:

(a)  $\text{Caballo} + \text{Alfil} + \text{Peón} = ?$

(b)  $\text{Reina} = \text{Alfil} + \text{Caballo} + ?$

(c) ¿Es posible encontrar cuatro piezas que sumen el mismo valor que una dama?  
¿Qué diferencia habría si el valor de la dama fuera 10?

(d) Estas son las piezas capturadas durante una partida, ¿es mejor para el blanco o para el negro?



### Respuestas

(a) 9

(b) 3

(c) No es posible ya que todas las piezas valen un número impar. Se podrían encontrar cuatro piezas que sumaran 10 p.e.  $\text{Alfil} + \text{Alfil} + \text{Alfil} + \text{Peón}$

(d)

① Blanco

② Blanco

③ Negro

## 7. Puzle de cuatro torres

Pareja

Edad 7+ Geometría, nociones espaciales, numeración, intersección

Tareas:

- Colocar cuatro torres en casillas negras de manera que dominen todas las casillas blancas.
- Encontrar otra posición para conseguir la misma tarea.

Aconsejar a los alumnos que comprueben sus soluciones.

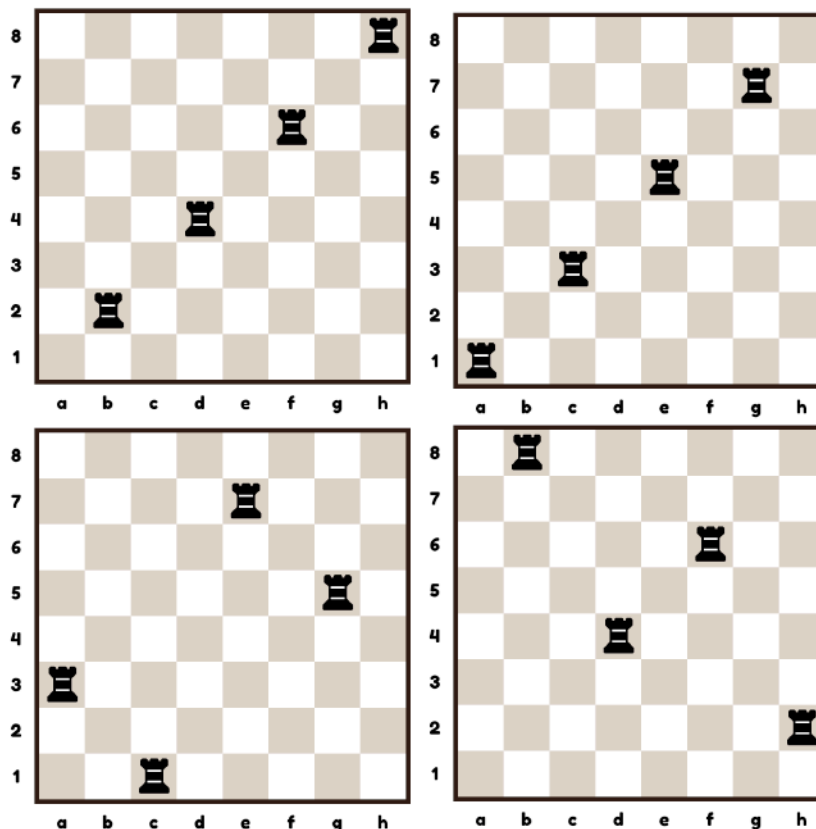
### Método de Solución

El tablero tiene 32 casillas blancas. Cada torre domina 8 casillas blancas ( $4 \times 8 = 32$ ). Observar que si una torre está situada en una casilla blanca, tan solo dominará 6 casillas blancas. Situada en una casilla negra dominará 8 blancas. Per lo tanto, estamos buscando cuatro casillas negras donde ubicar las torres.

Si las torres se colocan en casillas negras de columnas seguidas, p.e. una en a1 y otra en b2, entonces las dos torres dominarían las casillas blancas b1 i a2, por lo tanto, en lugar de dominar 16 casillas blancas, tan solo dominarían 14, que sería insuficiente. Observando vemos que las torres tienen que estar un número par de casillas alejadas una de la otra ya que sus intersecciones tienen que ser solo casillas negras.

### Respuesta

Consejo: Empecemos buscando soluciones en la diagonal negra larga y, después, las otras.



Edad 7+	Numeración, principio de Dirichlet, máximo/mínimo
---------	---

En una sala de juego hay muchas piezas de ajedrez en el suelo. Las recogemos y las contamos. ¿Cuántos juegos de ajedrez hay?

- (a) Hay 17 peones negros



- (b) Además de los 17 peones negros también hay 3 caballos blancos.



- (c) La sala de juego solo tiene suficientes juegos para poder jugar 20 personas en parejas.  
Buscar las soluciones mínimas y máximas en cada situación anterior.

### Método de Solución

Investigación practica utilizando contadores.

Explicar el significado de máximo y de mínimo y preguntar el camino para cada pregunta.

Tener en cuenta que no estamos hablando del posible resultado, solo de si es posible.

### Respuesta

La respuesta tendría que ser un intervalo: una o más piezas pueden proceder de cada conjunto. Es importante tener en cuenta que no todas las respuestas son simples números.

- (a) Entre 3 y 17

Al menos 3 conjuntos son necesarios ya que un juego tiene 8 peones. Si un peón pertenece a cada juego, necesitamos 17 juegos.

- (b) Entre 3 i 20

El mínimo de 3 juegos va bien ya que incluye los 3 caballos blancos. Faltan 20 piezas que, en el peor de los casos, podrían venir de 20 juegos. El color es irrelevante.

- (c) Entre 3 i 10

El número mínimo no cambia. El número máximo está restringido por requisito que el número de mesas sea 10 (es decir,  $20 \div 2$ ).

## 9. Puzzle de ataque a la esquina

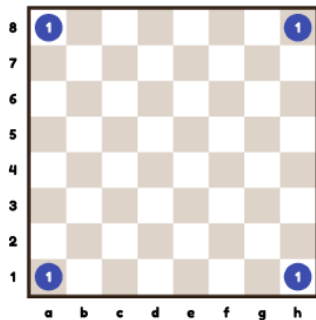
Dos Paredes

Edad 7+ | Aritmética, prueba y error, input/output

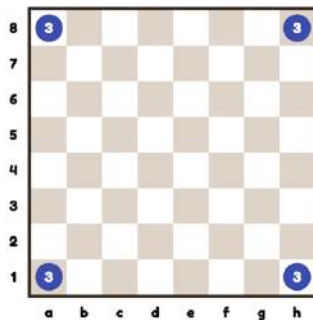
Cada esquina del tablero está ocupada por una pieza de ajedrez desconocida. Estas piezas pueden estar bajo el ataque de una o más piezas desconocidas de las otras esquinas. Ignora los colores.

Cada casilla de cada esquina tiene un número. Este es el número total de ataques que recibe esta casilla desde las piezas de las otras esquinas. Cada pieza ataca al menos otra pieza.

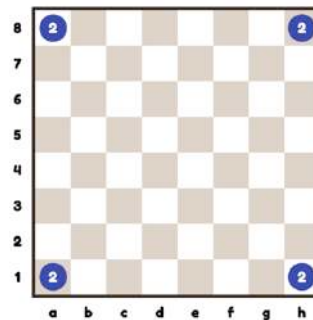
Tareas practicas: Deducir cuales son las piezas de cada esquina en cada situación:



Tarea 9(a)



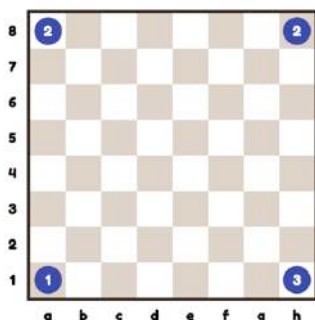
Tarea 9(b)



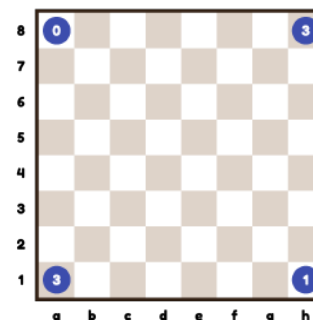
Tarea 9(c)

(d) ¿Hay alguna otra respuesta a 9(c) ?

### Extensión



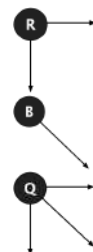
Tarea 9(e)



Tarea 9(f)

### Método de Solución

- Establecer que las únicas piezas son las de larga distancia ♖ ♗ ♘
- Establecer que el número de casillas atacadas por cada pieza es ♖=1 ♗=2 ♘=3
- Explicar que el número de ataques de salida es igual al de entrada
- Tener en cuenta que solo hay una manera de obtener los totales de 4 i 12, siendo el mínimo y máximo respectivamente



### Respuesta

- (a) ♖ ♖ ♖ ♖  
 (b) ♗ ♗ ♗ ♗  
 (c) ♗ ♗ ♗ ♗

- (d) ♖ ♖ ♗ ♗  
 (e) ♖ ♗ ♗ ♗  
 (f) ♗ ♖ ♖ ♗

## 10. El poder de la pieza

## Dos Parejas

Edad 7+ Numeración, simetría

El poder de una pieza varía según su posición en el tablero. Su poder es el número de casillas que domina.

Tarea práctica: (utilizando lapices de colores en un tablero)

El código/color de cada casilla es el número de casillas dominadas desde ella. El patrón resultante es el "poder" de esta pieza. Encontrar los poderes de:

- Torre
- Alfil
- Dama

¿Qué pieza se representa con estos códigos/colores de poder?

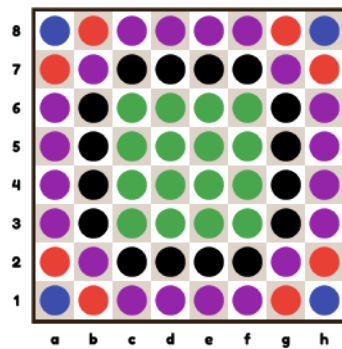


Imagen 10(a)

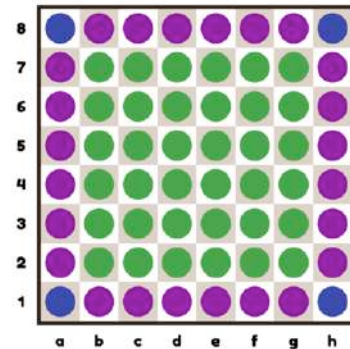


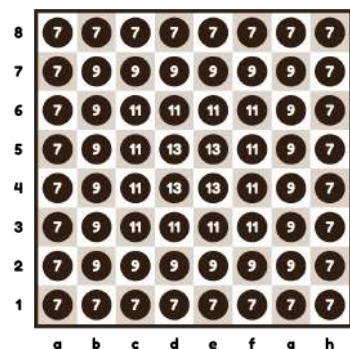
Imagen 10(b)

### Respuesta

Torre 14 distribución uniforme  
 Alfil Mira la imagen  
 Dama = Alfil + Torre  
 Añadir 14 al poder de cada casilla del alfil

10(a) Caballo

10(b) Rey



El Poder Del Alfil

## 11. Evitar Tres en una Línea

Pareja

Edad 8+ Geometría, rectas, pendiente, regla

Empezamos con un tablero vacío. Dos jugadores se turnan para colocar las piezas del mismo color. Un jugador pierde el juego si crea una línea recta de tres piezas. No hay ninguna obligación de notificar a vuestro oponente que se ha llegado a una situación de pérdida. Utilizad una regla colocada a partir de la pieza central para comprobar si hay línea recta. El juego es bastante fácil, pero puede haber confusión sobre como saber si una tercera pieza está en la misma línea que las otras dos.

### Método de Solución

Comprobar el tablero después de cada movimiento. Una pieza puede estar en una línea recta de tres, incluso si se encuentra a cierta distancia.

Explicar que hay diferentes tipos de líneas rectas. Las líneas rectas utilizadas en los movimientos de ajedrez de la torre son los más fáciles de reconocer:

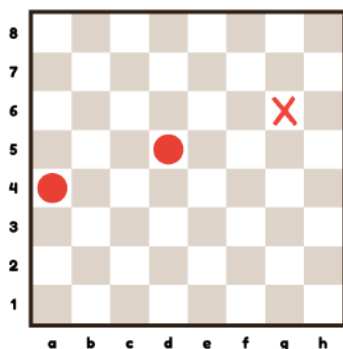
- + Torre (Ortogonal)
  - vertical (arriba, abajo)
  - horizontal (izquierda, derecha)

Las líneas rectas utilizadas en los movimientos de ajedrez del alfil también son fáciles de reconocer:

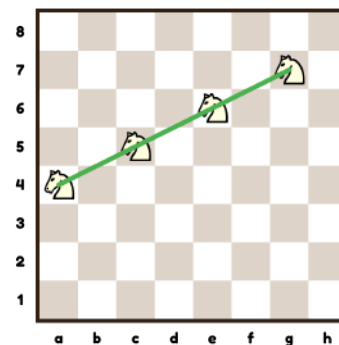
- x Alfil (Diagonal)
  - izquierda abajo y derecha arriba (pendiente = 1)
  - izquierda arriba y derecha abajo (pendiente = -1)

La pendiente entre dos piezas es el cociente entre la distancia vertical y la distancia horizontal. Si la pendiente entre dos piezas es la misma que la de ellas a una tercera, entonces las tres están en la misma recta. Las rectas hacia arriba hacia la derecha tienen pendiente positiva y las que apuntan hacia abajo hacia la derecha tienen pendiente negativa.

El caballo se mueve en forma de L de 2:1. Las líneas rectas también pueden ser del caballo, pero estas son más difíciles de reconocer. La pendiente es importante cuando se trata del caballo. En el gráfico de la derecha, los caballos aparecen en la misma línea y la pendiente es  $\frac{1}{2}$  ya que la distancia vertical (1) se divide por la distancia horizontal (2).



Poner una pieza en g6 es perder



La pendiente del movimiento del caballo es  $\frac{1}{2}$

En el gráfico de la izquierda hay dos piezas (a4, d5) con una distancia vertical (hacia arriba) de 1 y una distancia horizontal de 3 (como un caballo de largo recorrido). Luego, su relación es  $\frac{1}{3}$ . Por observación, la casilla g6 también tiene una pendiente de  $\frac{1}{3}$  desde d5. Si a4-d5 tiene una pendiente de  $\frac{1}{3}$  y d5-g6 la tiene de  $\frac{1}{3}$ , entonces una recta pasa por las tres casillas a4-d5-g6. El jugador que mueve debe elegir otra casilla y no g6.

## 12. Piezas en una Línea [11]

Pareja

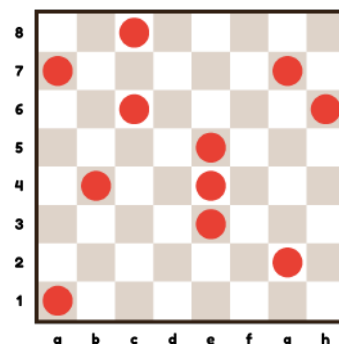
Edad 8+ Geometría, líneas rectas, pendiente, regla, lápiz

Copias de un tablero con 11 fichas como se ve a la derecha.

### Tareas

- ¿Cuántos grupos de tres fichas podemos encontrar que estén en línea recta?
- Coloca una nueva ficha en el tablero de manera que haya cuatro grupos más de tres fichas en línea recta.

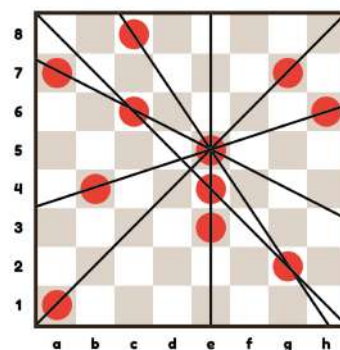
Es más fácil este ejercicio después de hacer el ejercicio 11.



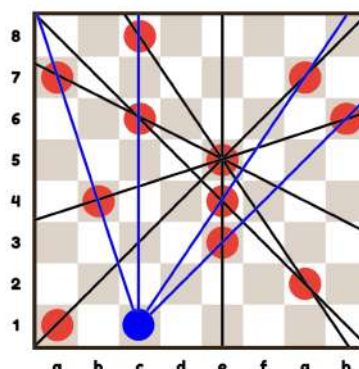
### Método de solución

- Los alumnos pueden encontrar fácilmente las líneas verticales y diagonales (e5-e4-e3; g7-e5-a1). Es más difícil encontrar líneas de pendiente distinta de la diagonal (a7-c6-e5).

- Coloca una regla entre las dos fichas. Hay que asegurar que la regla pase por las fichas. Buscar si hay una tercera ficha cerca. Prueba-lo para todos los pares de fichas. También se puede encontrar la pendiente de la recta entre los dos puntos. La pendiente es el cociente entre la distancia vertical y horizontal de una ficha a la siguiente, p.e. dos arriba y tres a la derecha. A continuación, desde el segundo punto mirar si hay otro punto que tenga la misma pendiente. Si es así, los tres puntos están en la misma línea recta. Prueba-lo utilizando una regla (más detalles sobre el ejercicio 11).



- Desplaza de forma sistemática una ficha por el tablero y, con una regla, comprueba si existen algunas líneas. Los alumnos, en general, no tienen una visión sistemática. Consejo: empieza en a1 e ir a la ficha más cercana. Desde c1, las líneas c1-c6-c8; c1-e3-h6; c1-b4-a7; c1-e4-g7 van bien.



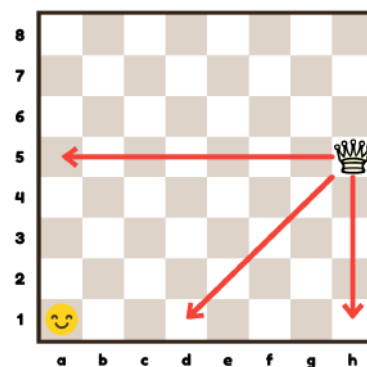
### 13. El juego de Wythoff [Q]

Pareja

Edad 8+	Trabajar hacia atrás a partir del objetivo
---------	--

Colocar una dama en h5 en un tablero vacío. Esta dama solo se puede mover hacia el oeste, sur-oeste o sur. Los jugadores se turnan para mover la dama. El primer jugador que mueve la dama a a1 es el ganador.

¿Quién gana: el primer jugador o el segundo?

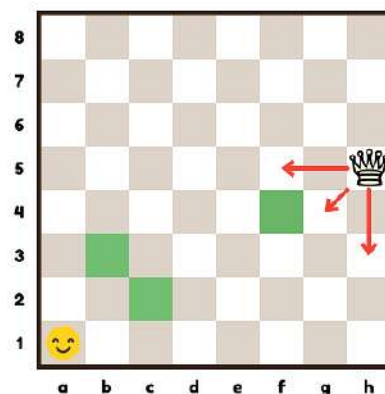


#### Método de Solución

Primero jugaremos con el objetivo que después jugaremos mejor.

Identifica las "casillas seguras" a las que te gustaría ir para ganar. Para ello, iremos hacia atrás desde a1. Utiliza fichas para marcar las casillas seguras.

Hay tres casillas seguras: b3, c2 i f4 (marcadas en verde).



#### Respuesta

El segundo jugador gana con la mejor jugada.

En su primer movimiento, el primer jugador no puede evitar que el segundo jugador llegue a una casilla segura o ir directamente a a1.

## 14.El Puzle de la Torre en la Esquina

Pareja

Edad 8+	Paridad, lápiz
---------	----------------

Usar lápiz y papel con un tablero de ajedrez con una torre en a1.

Tarea: La torre debe pasar por todas las casillas del tablero y acabar en h8.

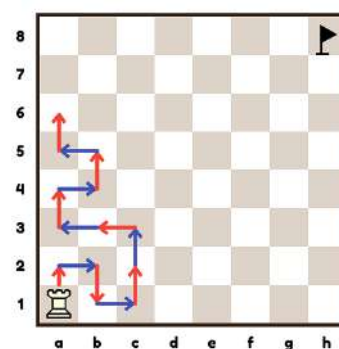
Condición: La torre no puede ocupar dos veces la misma casilla.

### Método de Solución

Después de probar distintas rutas, los alumnos decidirán que no es posible. Tendremos que insistir en que no encontrar solución no es sinónimo de que no haya solución. Demostrar que alguna cosa es imposible es un paso de gigante en la comprensión matemática de los alumnos.

Consejos y preguntas principales para guiar hacia la solución:

- La torre tendría que andar paso a paso en su trayecto. Usar dos colores: p.e. rojo para el impar (1<sup>st</sup>, 3<sup>rd</sup>, 5<sup>th</sup> etc.) y azul para los movimientos pares como se ve en la imagen.
- ¿Cuántas casillas visita la torre en su camino hacia h8?
- ¿Cual es el color de la 1<sup>st</sup>, 2<sup>nd</sup>, 3<sup>rd</sup>, 4<sup>th</sup> etc. casilla?
- ¿Cual es el color de la 63<sup>rd</sup> casilla?
- ¿Cual es el color de la casilla objetivo h8?



### Respuesta

Cada casilla visitada es una casilla clara, luego, la 63<sup>rd</sup> también tendría que ser clara, pero la realidad indica que es una casilla oscura, luego la torre nunca acabará la tarea propuesta.

### Extensión

Pregunta: ¿En qué medida de tablero sería posible este recorrido?

Respuesta: La tarea solo es posible en tableros de medida impar (7x7, 5x5 3x3 etc.)

## 15. El Recorrido Más Corto de la Torre

Individual

Edad 8+	Enumeración
---------	-------------

Usar lápiz y papel con un tablero y con una torre en a1.

Alternativamente, usar un plástico sobre una plantilla de tablero, con una torre en a1 y una señal en h8.

Tarea: La torre ha de visitar todas las casillas del tablero y volver a a1.

Condición: La torre no puede visitar la misma casilla dos veces.

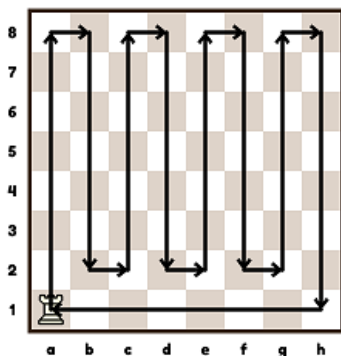
Actividades Sugeridas:

- Encontrar tantas maneras como sea posible para completar la visita de la torre.
- Dibujar cada ruta en el papel.
- Encontrar la duración de cada recorrido dibujado.

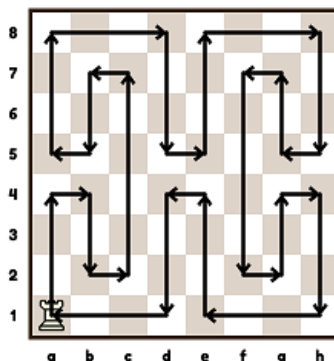
Observemos las casillas per donde pasa la torre. Es importante tener claro que la torre vuelve a su punto de partida, a1. Dejar que los alumnos exploren los diferentes recorridos e indiquen cuales son las casillas que visitan.

### Exploración

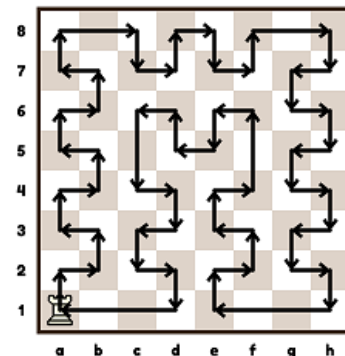
- ¿Cuál es el menor número de movimientos que puede completar el recorrido?
- ¿Cuál es la ruta más larga (el mayor número de movimientos) que podemos encontrar?



Un recorrido con un mínimo de 16 movimientos.



Un recorrido con 28 movimientos



El recorrido más largo con 56 movimientos

Podemos demostrar que el más corto es de 16 movimientos. Algunos recorridos de la torre son interesantes de estudiar. Para discutir:

- Si un recorrido empieza con un movimiento vertical, ha de acabar con uno de horizontal.
- Verticales y horizontales se alternan.
- Tanto hay de verticales como de horizontales.
- La duración de cada recorrido es la misma.



56 movim. - respuesta incorrecta!

## 16 Carrera hacia la Esquina [torre]

Pareja

Edad 8+

Simetría

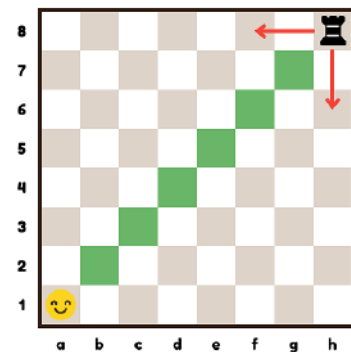
Usar un tablero, una torre y colores para marcar los movimientos. Coloca una torre en h8 y una señal en a1. Esta torre solo se puede mover hacia el Oeste o hacia el Sur. Los jugadores se turnan para mover la torre. El primer jugador que llega a a1 gana el juego.

A los alumnos les gusta jugar a este juego. ¿Quién gana – el primer jugador o el segundo?

### Método de juego

El segundo jugador tiene la estrategia ganadora. Debe mover la torre a la diagonal a1-h8. A continuación, se muestra con orientar a los alumnos hacia la solución:

- Los primeros alumnos han de explorar el juego libremente. Diremos que busquen la manera de ganar. Preguntaremos si prefieren ser el primero o el segundo jugador.
- Juega como segundo jugador con una estrategia correcta contra un compañero o un grupo de compañeros.
- Si aun no encuentran la estrategia ganadora, deben pensar en la importancia de la diagonal a1-h8.



## 17. Recortar

Pareja

Edad 6+ | Formas, simetría

Usar copias de un tablero con una señal en h8. Ver Imagen 18(a)

Cada jugador, en su turno, dobla el tablero horizontal o verticalmente a lo largo de cualquier línea marcada. Ver Imagen 18 (b).

No hay piezas en este juego. Pierde el que se queda con la señal. ¡En el juego original jugaron con una gran barra de chocolate!

¿Quién gana – el primer jugador o el segundo?

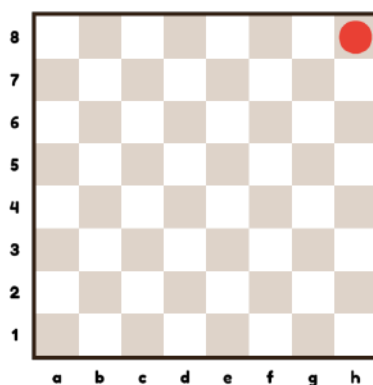


Imagen 18(a) Evita mantener h8

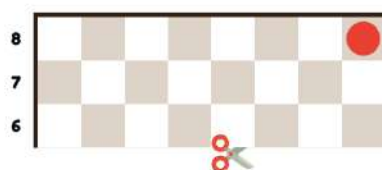


Imagen 18(b) Recortando horizontalmente

### Método de juego

Para ganar, el jugador tendría que utilizar una estrategia geométrica. Haga lo que haga el primer jugador, el segundo tendría que doblar el papel para dejar un tablero de forma cuadrada. Ver la imagen 18 (c).

En otras palabras, la estrategia ganadora consiste en mantener la diagonal hacia h8. El oponente no tendrá más remedio que doblar sin mantener la diagonal. Sucesivamente, en cada movimiento, se repite la estrategia de dejar formas cuadradas hasta que se consiga la casilla marcada.

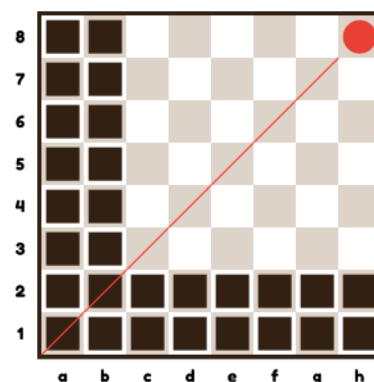


Imagen 18(c) El siguiente jugador solo puede hacer un doblage

## 18. Puzle del Poder de un Ejército

Pareja

Edad 8+ | Enumeración, Diagramas de Venn, Prueba y Error

Coloca uno de cada uno de los seis tipos de piezas del mismo color en sus casillas de inicio. Ver Imagen 19(a).

Q1: ¿Cuántas casillas domina?

Las casillas dominadas por varias piezas cuentan solo una vez.

Q2: Identifica las casillas que están dominadas una vez, dos veces, tres veces.

Q3: Coloca las piezas para conseguir el mínimo número de casillas dominadas.

Q4: (avanzado) Vuelve a colocar las piezas para encontrar el número máximo de casillas dominadas.

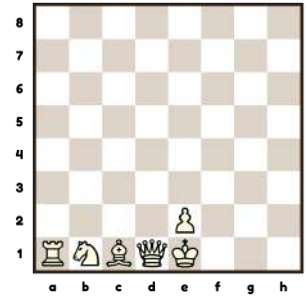


Imagen 19(a) Puzle Poder Ejército

### Respuestas

Q1: 25, Ver Imagen 19(b)

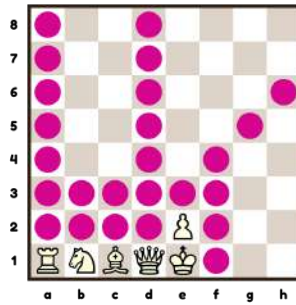


Imagen 19(b) 25 casillas dominadas

Q2: Ver Imagen 19(c)

- 1 vez
- 2 veces
- 3 veces

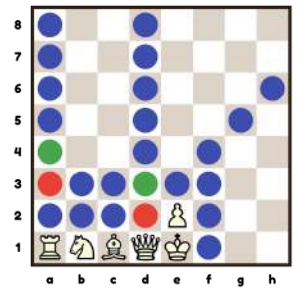


Imagen 19(c) Ataques múltiples

Q3: El mínimo número de dominios es 5, logrado de varias formas. Ver Imagen 19(d).

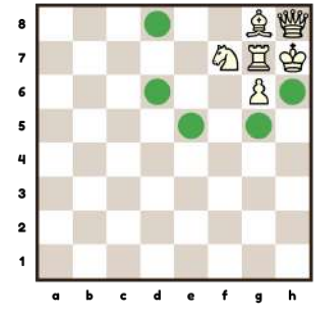
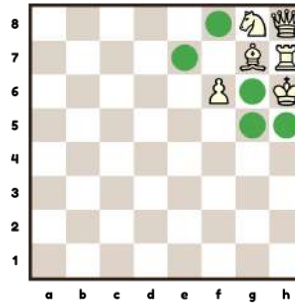
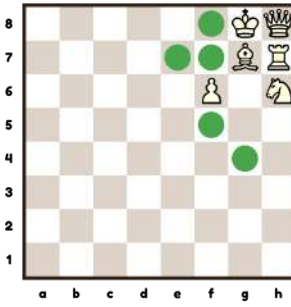
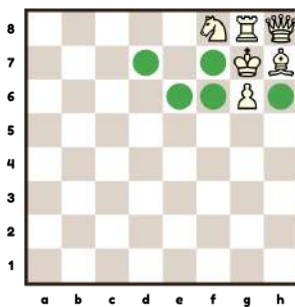


Imagen 19(d) Mínimo número de dominios

Q4: El máximo número de casillas dominadas es 51.

6 casillas están ocupadas por piezas.

7 casillas no son dominadas.

### Extensión

Q5 Anotar las casillas vacías y pedir a la clase que indique la posición de las piezas.

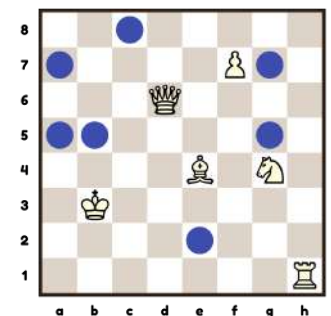


Imagen 19(c) Máximo número de ataques

## 19. Número Máximo de Caballos

Pareja

Edad 8+	Enumeración, paridad
---------	----------------------

¿Cuál es el número máximo de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez de manera que ningún caballo ataque a otro?

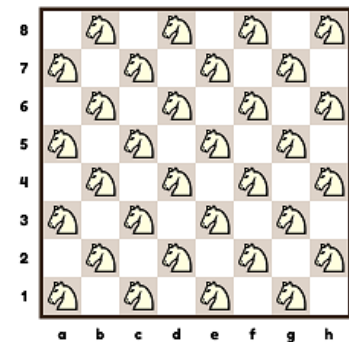
Usar fichas en lugar de caballos.

### Método de Solución

Los caballos que no se atacan entre sí, se llaman independientes. Observa que un caballo cambia de color en cada movimiento (de casilla blanca a negra y viceversa). Los caballos colocados en casillas del mismo color serán independientes.

### Respuesta

El número máximo es 32.



## 20. Pieza misteriosa

Pareja

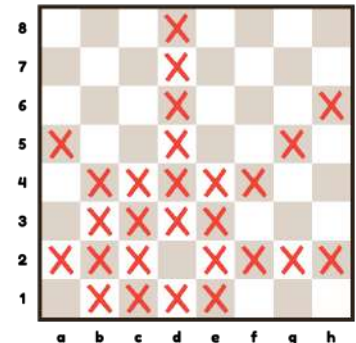
Edad 8+ | Propiedades disjuntas, unión, simetría

Una pieza misteriosa tiene el poder de las distintas piezas que la forman.

Una pieza misteriosa ataca las casillas marcadas:

- (a) Indica donde está la pieza misteriosa
- (b) Identifica las piezas que la forman

Recordar Ejercicio 10 "El poder de las piezas".



### Método de Solución

Observar la simetría alrededor de d2.

- (a) Busca las líneas largas y dibújalas con un lápiz, son las características de las piezas de larga distancia. Busca sus intersecciones.  
d8-d1, a5-e1, h6-c1, a2-h2
- (b) Observa que una dama en d2 nos cubre muchas casillas marcadas. Las quitamos y observamos lo que nos queda. Es el movimiento de un caballo.

### Respuesta

- (a) d2
- (b) dama + caballo

Edad 8+	Lógica
---------	--------

Piezas iniciales ♔♚♜♝♞♟♠♡

Una actividad práctica con los alumnos para poner las piezas en el tablero.

Tarea: Establecer una posición con las piezas anteriores y las siguientes reglas:

1. Las piezas están una al lado de la otra en la misma línea
2. El rey está al lado de la dama que está en c4
3. La torre está entre el alfil y un peón
4. El alfil es la pieza más alejada de la dama
5. El caballo está en una fila por encima del rey

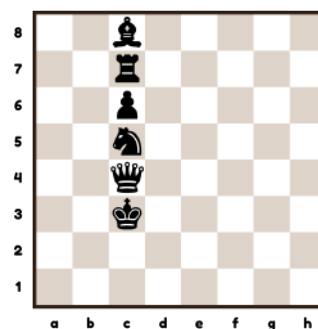
### Método de Solución

Esto se puede resolver usando prueba y error. Alternativamente, se puede implementar un enfoque más estructurado. La clave es encontrar un buen punto de partida. Hacer uso de la información de modo que no sea necesario adivinar. Por ejemplo:

- (a) De (5) aprendemos que las piezas están verticalmente ubicadas en la columna c
- (b) De (2) sabemos que la posición de la dama es c4
- (c) De (3), hay 3-piezas en línea vertical alfil+torre+peón  
Hay cuatro casillas encima de la dama c4 y tres debajo.  
Para cumplir (4), el alfil debe estar en c8, la casilla más alejada de la dama.
- (d) De (5) el caballo está por encima del rey y como c4 está ocupada, debe estar en c5 o más arriba
- (e) Por eliminación, el rey está en c3.

### Extensión

Actividad creativa: Pedir a los alumnos que ideen un problema de lógica posicional. ¡El premio al 'mejor problema' será para el que tenga una solución única!



21. Solución

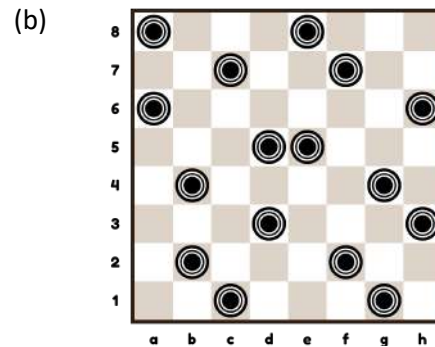
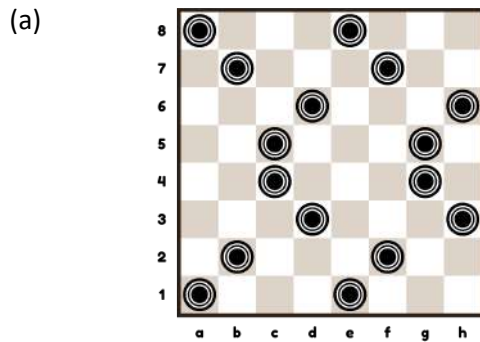
## 22. Fichas en una Línea

Pareja

Edad 8+ Líneas rectas, pendientes, prueba y error

Los alumnos reconocen líneas horizontales, verticales y diagonales. Les resulta difícil identificar las líneas con otras pendientes.

**Tarea 1:** Discutir estas dos posiciones y preguntar a la clase que encuentre líneas con pendiente que tengan tres fichas.



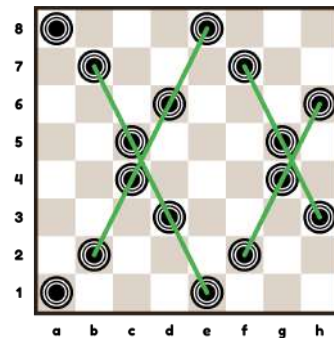
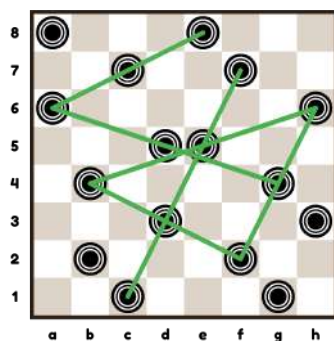
**Tarea 2:** Coloca 16 fichas en el tablero de manera que no haya tres en una línea.

### Método de Solución

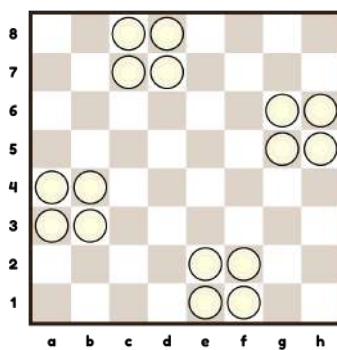
Resolver esto requiere prueba y error. Aquí hay algunos consejos:

- Empieza por poner las fichas en grupos (p.e. de cuatro) que simplifica la tarea.
- Coloca dos fichas en cada columna y cada fila pero que no toquen las diagonales. Ahora comprueba las otras pendientes con una regla.
- Si nos acercamos a una solución, intentemos ajustar las fichas sistemáticamente.

Tarea 1



Tarea 2



Una solución: Cuatro grupos de cuatro

## 23. Mapa de Movimientos Mínimos

Pareja

Edad 9+	Enumeración, nociones espaciales
---------	----------------------------------

### Tarea

Usa fichas de colores para construir un mapa que muestre el número mínimo de movimientos que se necesitan para llegar a cualquier otra casilla desde d4 para: (a) un rey; (b) un caballo.

### Método de Solución

Empezando en d4, marca todas las casillas accesibles en un movimiento. Luego desde cada uno de estos repetimos el proceso. Lo repetimos hasta terminar las casillas.

### Respuesta



## 24. ¿Cuántos Caminos? [peón]

Pareja

Edad 9+	Enumeración, nociones espaciales
---------	----------------------------------

El peón puede hacer cualquier movimiento en un cuadrado, ya sea hacia adelante o en diagonal. Puede capturar una pieza imaginaria, por ello debe tenerse en cuenta.

**Tarea:** ¿Cuántas rutas diferentes hay para el peón?:

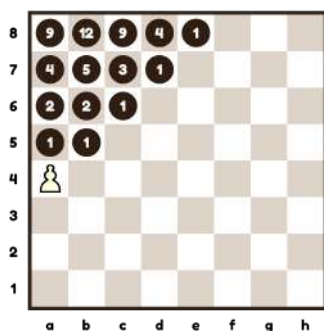
	De	A
(a)	a2	Otro lugar
(b)	d5	Otro lugar
(c)	d4	d8

### Método de Solución

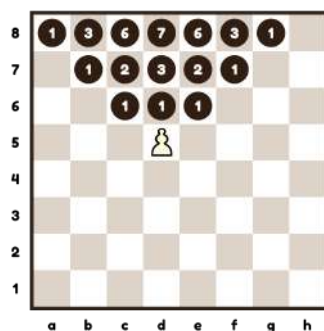
Para cada posición posible del peón, cuenta el número de maneras en que el peón puede alcanzar esa casilla y escribe ese número en ella. Empieza desde la posición original. Algunas preguntas principales:

- ¿Cómo se pasa a la siguiente fila?
- ¿Qué haces con los números cuando subes una fila?
- ¿Es igualmente probable que el peón ocupe todas las casillas posibles?

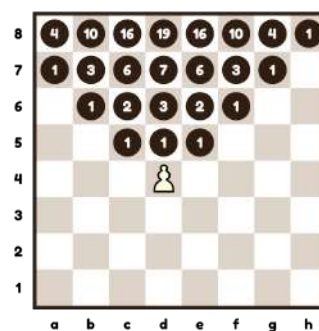
### Respuesta



24(a) 35 maneras de alcanzar la última fila



24(b) 27 maneras de alcanzar la última fila



24(c) 19 maneras de ir a d8

## 25.El Peón Ligero

Pareja

Edad 9+ Lógica, información, diagramas en árbol

Hay ocho peones blancos que se ven iguales pero uno de ellos pesa un poco menos que los otros. La diferencia es demasiado pequeña para juzgarla a mano. Tienes una balanza imaginaria en la que puedes colocar uno o más peones a cada lado. Usala para encontrar el peón ligero ¿Cuántos pesajes necesitas para encontrar el peón más ligero?



### Método de Solución

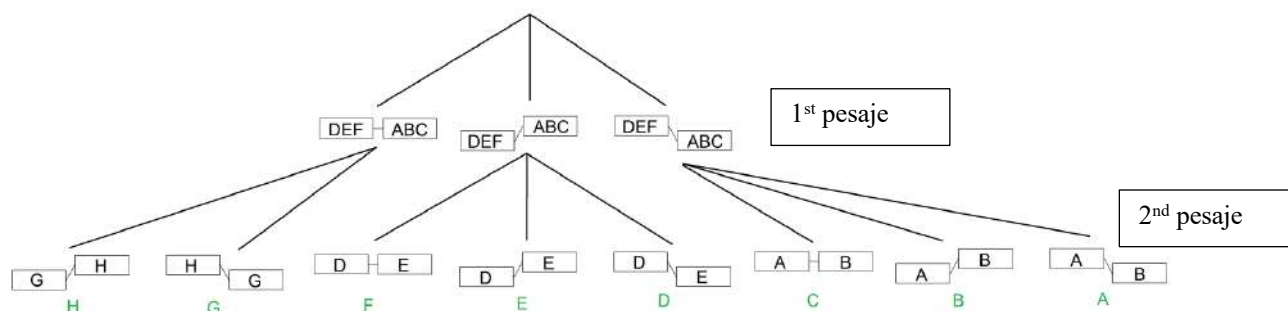
En este experimento mental, la idea clave es que si sabes que un elemento es diferente, si pesas dos, puedes sacar conclusiones sobre el tercero.

Considera ocho peones con nombres A, B, C, D, E, F, G, H. Haz un primer pesaje con ABC v DEF.

Si está equilibrado, entonces sabes que el peón más ligero es G o H. En ese caso, ejecuta el pesaje sencillo final G v H.

Si está desequilibrado, con ABC más pesado que DEF, entonces sabes que el peón más ligero es D, E o F. En ese caso, ejecuta el pesaje sencillo final D vs E (si está equilibrado, el peón más ligero es F; si D es más pesado que E, el peón más ligero es E; si E es más pesado que D, el peón más ligero es D).

Una forma pedagógica de proceder es organizar un diagrama en árbol en la pizarra:



Los alumnos deben entender que las ocho posibilidades (ocho peones) coinciden con las ocho terminales del diagrama en árbol que describe la estrategia.

**Respuesta** Solo se requieren dos pesajes.

### Extensión

¿Qué pasa si hay nueve peones, uno de ellos ligeramente más ligero que los otros?

La estrategia sigue funcionando, con una rama más (para el equilibrio entre ABC y DEF). Hay tres resultados posibles (izquierda < derecha; izquierda = derecha; izquierda > derecha). Hay tres formas de caminar a través de un árbol de un peso y nueve formas (3x3) de caminar a través de un árbol de dos pesajes, y así sucesivamente. Tener en cuenta que 10 peones no se pueden resolver con solo dos pesajes, se requieren tres pesajes.

## 26. El Juego de Wythoff [QQ]

Pareja

Edad 9+	Simetría, trabajar hacia atrás a partir del objetivo
---------	--

Coloca dos damas del mismo color en h5 y g8 en un tablero de ajedrez vacío. Se estipula que estas damas solo pueden moverse hacia el oeste, sudoeste o sur. Los jugadores se turnan para mover a la dama. Proporcionar fichas para colocar en el tablero. El primer jugador en mover la dama a a1 es el ganador. ¿Quién gana, el primer jugador o el segundo?

- o Ver también el juego 13 con una dama.
- o Los primeros niños/niñas deben explorar el juego libremente. Pedirles que busquen una manera de ganar. Preguntarles si prefieren ser el primer o el segundo jugador en este juego.
- o Jugar como primer jugador con la estrategia correcta contra un niño/niña o un grupo de ellos.
- o Si aún no se encuentra la estrategia ganadora, decirles que piensen en la importancia de la diagonal larga a1-h8

### Método de Solución

Establecer una posición simétrica alrededor de la diagonal principal a1-h8. A partir de entonces, el primer jugador copia los movimientos del segundo. Una estrategia conocida como Tweedledum-Tweedledee.

### Respuesta

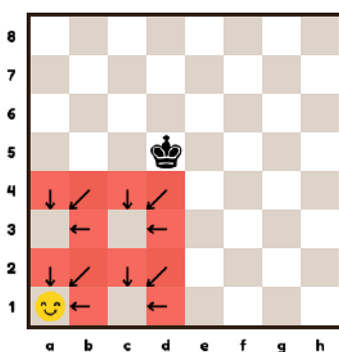
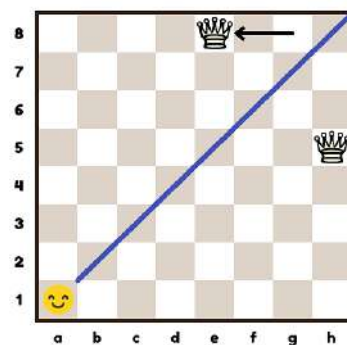
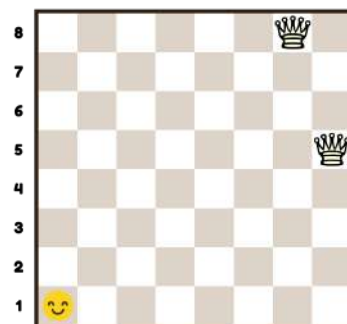
El primer jugador puede ganar moviendo una dama a e8.

### Extensión

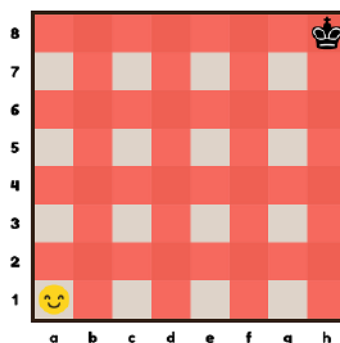
Vamos a jugar con un solo rey a partir de h8. Como antes, el primer jugador en mover el rey a a1 gana.

Sugerencia: trabajar hacia atrás desde la solución. Identifica las casillas donde no quieres aterrizar al rey (marcados en rojo). Estrategia ganadora: evitar los cuadrados rojos.

El primer jugador puede ganar con la mejor jugada: Rey a g7, luego copiar el movimiento del oponente.



El juego del rey de Wythoff: los movimientos finales.



El juego del rey de Wythoff: patrón completo

## 27. El rompecabezas de dominó

Pareja

Edad 9+ Formas, paridad

Este ejercicio se beneficia del acceso a 32 dominós de tamaño 2x1 que cubren exactamente dos casillas del tablero. Estos pueden ser recortes de tarjeta.

P1: ¿Pueden los dominós cubrir las 64 casillas del tablero de ajedrez?

P2: ¿Las fichas de dominó pueden cubrir las 62 casillas de un tablero del que se eliminan dos esquinas opuestas?

P3: ¿Las fichas de dominó pueden cubrir las 62 casillas de un tablero del que se eliminan dos casillas de colores diferentes?

### Respuestas

Q1 Sí, representado en la Imagen 28 (a). Hay muchas formas de cubrir el tablero.

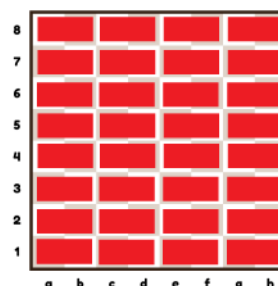


Imagen 28(a) Cubriendo un tablero con dominó.

Q2 No. La segunda pregunta tiene una ingeniosa solución cromática. Una pieza de dominó siempre cubre una casilla blanca y una negra. Entonces, un grupo de dominós cubren un número igual de casillas de cada color. El tablero mutilado (Imagen 28 (b)) tiene 30 casillas blancas y 32 negras, por lo que la respuesta a la pregunta formulada es negativa.

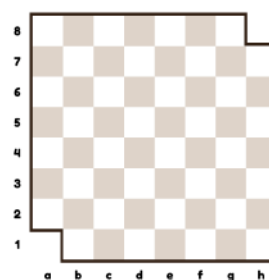


Imagen 28(b) Tablero mutilado

Q3: Sí. Supongamos que eliminamos dos casillas de diferentes colores.

Sí. Hay una ingeniosa solución geométrica. La línea de la Imagen 28 (c) pasa por todas las casillas.

Retire un cuadrado negro y otro blanco. La eliminación divide la línea en dos segmentos (consulte la Imagen 28 (d)). Uno conecta los lados amarillos y el otro conecta los lados azules).

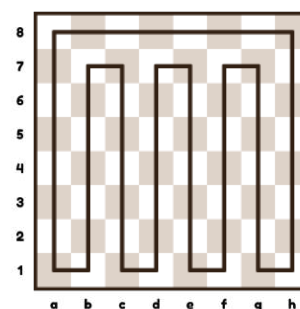


Imagen 28(c) Línea continua

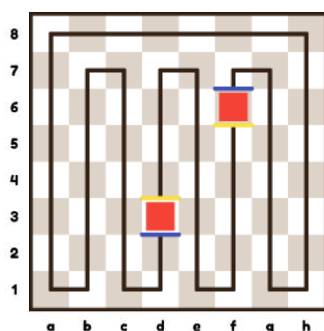


Imagen 28(d) Línea continua en dos segmentos

Ahora, todo lo que debe hacerse es cubrir cada segmento con dominó. Esto es posible porque hay un número equilibrado de casillas en blanco y negro en cada segmento. Este método funciona para cualquier par de casillas de colores opuestos eliminados.

## 28.El rompecabezas de trominó

## Individuales

Edad 9+ Prueba y Error, simetría, múltiplos, divide para ganar

Utiliza copias impresas del tablero de ajedrez vacíos con lápiz y 22 trominós. Un trominó es una forma de tamaño 3x1. Cada trominó cubre exactamente tres casillas del tablero. ¿Se puede cubrir el tablero de ajedrez con trominós 3x1 si se ha eliminado una casilla de la esquina? Este ejercicio es fácil de explicar y se puede hacer solo.



Reserva para un “día especial”.

- ¿Pueden los trominós cubrir las 64 casillas del tablero de ajedrez?
- Elimina una esquina del tablero de ajedrez.  
¿Pueden los trominós cubrir las 63 casillas del tablero mutilado?
- ¿Hay alguna otra casilla, aparte de la de la esquina, que pueda quitarse para que quepan los trominós?

### Preguntas introductorias

- ¿Pueden los trominós cubrir las 64 casillas del tablero de ajedrez? No, ya que 64 no es un múltiplo de 3.
- ¿Cuántos trominós necesitas para cubrir 63 casillas?  $63/3 = 21$ : 21 trominós cubrirán 63 casillas.
- ¿Importa qué esquina del tablero de ajedrez se elimina? No, no importa debido a la simetría.

### Meterse en el problema

- Trata de cubrir el tablero de ajedrez que tiene una esquina anulada con trominós. Haz varios intentos con diferentes arreglos de azulejos. [No es posible completar la tarea.]
- Retira una casilla diferente del tablero de ajedrez (táchala en tu hoja). Tal vez trates de eliminar una casilla de la diagonal larga. La eliminación de b7 no parece funcionar como se muestra en la Imagen 29 (a).

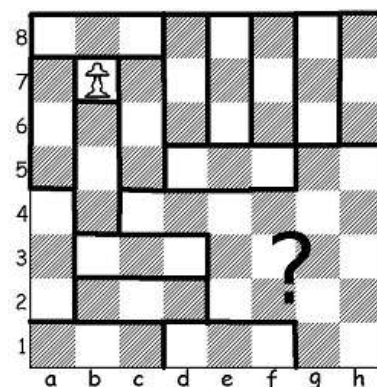


Imagen 29(a)

### Respuesta

Si se elimina c3, c6, f3 o f6, ¡se puede hacer el mosaico!

### Método de Solución

Con Prueba y Error, los alumnos encontrarán una de las cuatro soluciones simétricas:

Imagen 29 (b). La prueba está más allá del nivel de primaria.

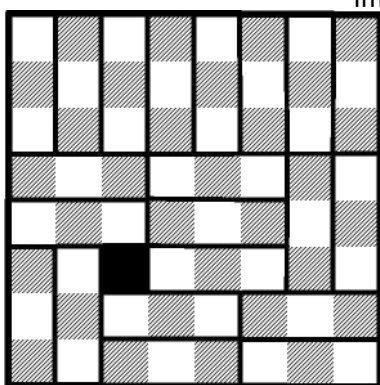


Imagen 29(b)

## 29. Puzzle de dos damas

Dos Parejas

Edad 9+ Enumeración, prueba y error

**Tareas:** Coloca dos damas en un tablero de ajedrez para que dominen:

- (a) máximo numero de casillas
- (b) mínimo numero de casillas

Solo se cuentan las casillas desocupadas. Un segundo ataque en una casilla no se cuenta. Ignorar los colores.

### Método de Solución

- (a) Sabemos por el contorno de poder que la dama es más fuerte en el centro del tablero. Por lo tanto, empieza colocando una dama en una de las casillas centrales (por ejemplo, d4). Luego, trata sistemáticamente de colocar la segunda dama lo más cerca posible. El número máximo de 42 surge cuando las damas son (i) ortogonalmente adyacentes en el centro, o (ii) están a una distancia de un caballo en el lado amplio de la primera dama (por ejemplo, d4 y e6).
- (b) Sabemos por el contorno de poder que la dama es más débil en el borde del tablero. Aprendemos de la tarea anterior que las damas se restringen entre sí cuando están en la misma diagonal. El número mínimo de 32 casillas desocupadas surge cuando las damas están (i) en las esquinas diagonales, o (ii) en las esquinas ortogonales.

### Respuesta

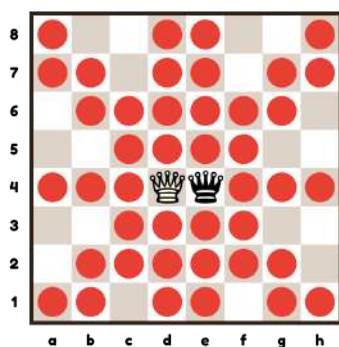


Imagen 29(a) máximo (i)

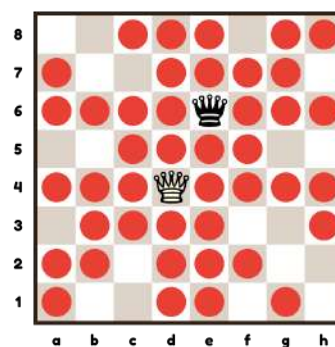


Imagen 29(a) máximo (ii)

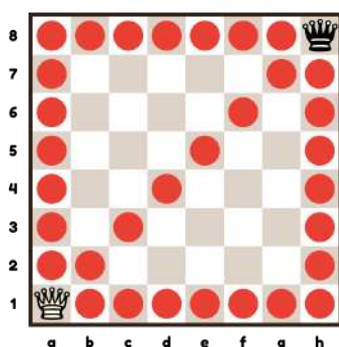


Imagen 29(b) mínimo (i)

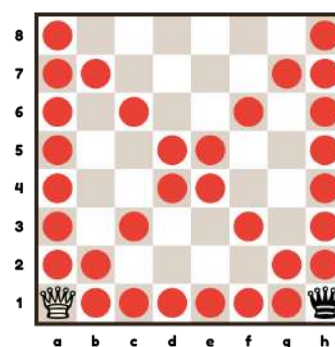


Imagen 29(b) mínimo (ii)

### 30. Jaque mate equidistante

Pareja

Edad 9+ Geometría, medidas de distancia, aprendizaje entre compañeros

Este es un ejercicio con piezas y un tablero de ajedrez que se realiza mejor en parejas o en pequeños grupos. Al ser necesario saber sobre jaque mate, al menos un miembro del grupo o pareja debe conocer las reglas del ajedrez. Después de esta investigación, ¡todos sabrán qué es el jaque mate!

#### Introducción

Pregunta: Una pieza da control, pero ¿cuál es el papel de la segunda pieza en el jaque mate?

Respuesta: La segunda pieza protege las casillas de escape, es decir, mantiene al rey "en prisión".

#### Método de Solución

Establece posiciones con dos piezas blancas que estén a la misma distancia de la casilla a1.

Ahora coloca el rey blanco en c3 y el rey negro en a1

- Encuentra dos piezas blancas para hacer jaque mate.
- Asegúrate de que estas dos piezas blancas estén a la misma distancia del rey negro.

#### Respuesta

Hay soluciones diferentes con jaque mate. En las Imagen 30(a) y 30(b), la dama puede intercambiar con la otra pieza y seguir dando jaque mate. Observa que la Imagen 30(c) es una solución falsa porque la dama blanca puede ser capturada. La Imagen 30(d) tampoco es una solución porque la posición es ilegal: el rey negro ya estaba en jaque en el movimiento anterior.

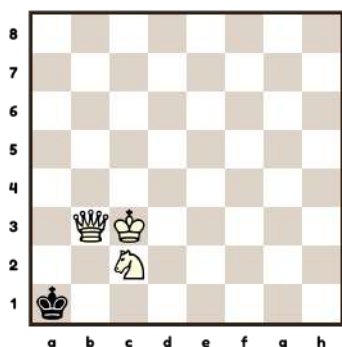


Imagen 30(a)

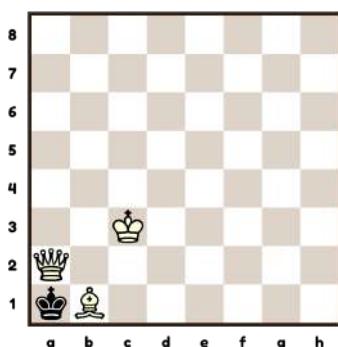


Imagen 30(b)

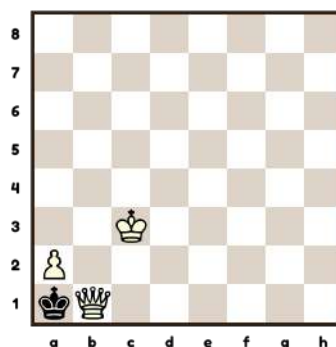


Imagen 30(c) X

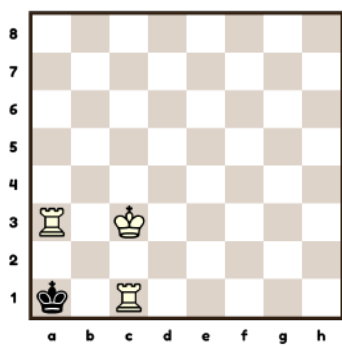


Imagen 30(d) X

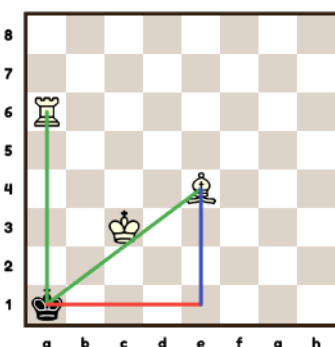


Imagen 30(e)

En la Imagen 30(e) las piezas están 5 unidades (una unidad es la longitud del lado de una casilla) lejos del rey negro; más precisamente el punto central de a1. Los puntos centrales de a1, e1 y e4 forman un triángulo rectángulo. Los dos lados más cortos tienen una longitud de 3 y 4 unidades y, utilizando el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa debe ser de 5 unidades. [Edad 10+]

## 31. El juego de la resta

Pareja

Edad 9+ Simetría, múltiplos

Coloca 10 fichas en tres filas. Los jugadores se turnan para eliminar 1, 2 o 3 fichas del final de cualquier fila. El jugador que elimine la última ficha es el ganador.

Este juego está relacionado con la tabla del 3 veces (o la tabla del 4 si el número máximo de fichas que se eliminarán es 4, etc.)

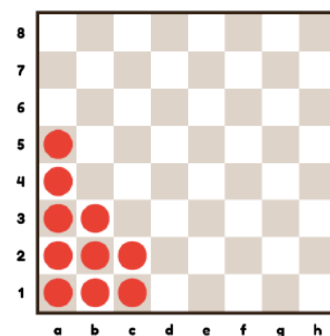


Imagen 31(a) Juego de la resta

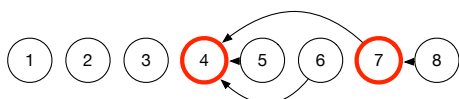
### Pregunta preliminar

Encuentra un movimiento ganador en una fila de tamaño 8



El movimiento ganador es la eliminación de una ficha.

En general, la jugada ganadora es dejar 4, 7, (10) ... fichas, es decir, un múltiplo de 3 más 1, que es uno más que el número máximo de fichas que se pueden eliminar. Al final, el oponente debe dejar 1, 2 o 3 fichas, después de lo cual el primer jugador retira la última ficha.



### Estrategia de juego

La mejor estrategia en los juegos de último movimiento es ganar pares independientes de componentes idénticos. A partir de entonces, para cada par, imita el movimiento de tu oponente: la Estrategia de "Tweedledum y Tweedledee" (véase también el Ejercicio 26).

### Plan Ganador

El movimiento ganador es eliminar la tercera fila. En la Imagen 31(b) los pares de componentes idénticos están entre corchetes. Desde esta posición, copia todo lo que haga el oponente.

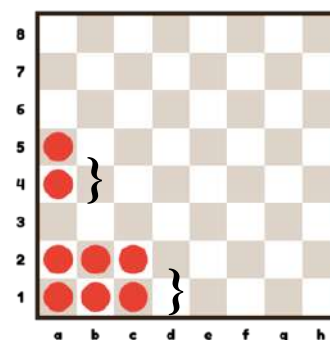


Imagen 31(b) Pares de componentes idénticos.

### Extensión

Juega la posición en 31(c). El movimiento ganador es eliminar una ficha de la primera fila. Para un método de solución, ver el siguiente Ejercicio 32 Nim.

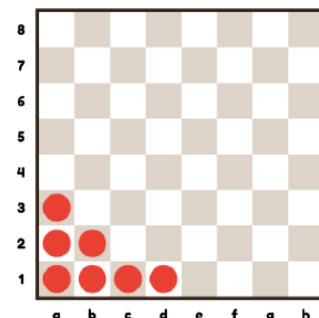


Imagen 31(c) Ejercicio de extensión

## 32. Nim

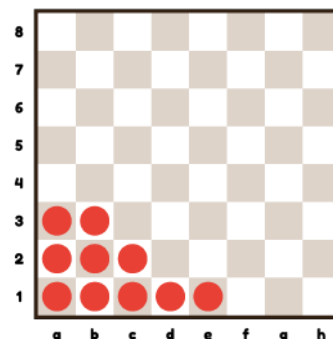
Pareja

Edad 10+ Simetría, múltiplos, potencias

Coloca diez fichas en tres filas: 5,3,2

Los jugadores se turnan para eliminar una o más fichas del final de cualquier fila. La persona que elimina la última es el ganador.

¿Quién gana, el primer jugador o el segundo?



### Estrategia de juego

Un plan ganador es tratar de obtener simetría y luego copiar los movimientos de tu oponente. La simetría surge cuando hay pares de filas con el mismo número de fichas en cada fila. Si tu oponente elimina una o más fichas, eliminas el mismo número en la otra fila: Tweedledum y Tweedledee.

### Plan Ganador

El movimiento ganador para el primer jugador es eliminar cuatro fichas de la primera fila para dejar {1,3,2}. Haga lo que haga tu oponente, permite crear simetría en tu turno. Por ejemplo:

- Tu oponente elimina la fila 1 dejando {0, 3, 2}. En tu movimiento, elimina una ficha de la segunda fila para dejar {0, 2, 2}. Esto es simétrico y puedes ganar como se describe arriba.
- Tu oponente elimina la tercera fila dejando {0, 3, 5}. En tu movimiento, quita dos fichas de la primera fila para dejar {0, 3, 3}. Esto es simétrico y puedes ganar como se describe arriba.

[Edad 11+] Más general, el plan ganador es lograr simetría con respecto al número de "potencias de 2" (1,2,4,8). Por ejemplo, una fila de 7 comprende tres potencias de 2: 1, 2 y 4. En la posición inicial, los grupos {5,3,2} se descomponen de la siguiente manera:

$$5 = 4 + 0 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$2 = 2 + 0$$

Esto da

Potencias de 2	1	2	4
Número	2	2	1

Hay dos de 1, dos de 2 y uno de 4.

Al eliminar el 4, nos quedamos con estas potencias de 2: dos 1 y dos 2. Por lo tanto, la jugada ganadora en el primer movimiento es eliminar cuatro fichas de la primera fila.

### 33. Juego de monedas de oro

Pareja

Edad 10+ | Simetría, múltiplos, diagramas en árbol, trabajar hacia atrás

Coloca diez fichas rojas en tres filas: 5,3,2. Además agrega una ficha dorada en la fila más larga. Ver la Imagen 34 (a). Los jugadores se turnan para eliminar cualquier número de fichas desde cualquier lugar de cualquier fila. La ficha dorada debe ser la última en eliminarse y no puede eliminarse junto con una roja.

El jugador que saque la ficha de oro es el ganador. ¿Quién gana?

Este juego se aconseja hacerlo después de haber jugado el Juego de Resta (Ejercicio 31) y Nim (Ejercicio 32).

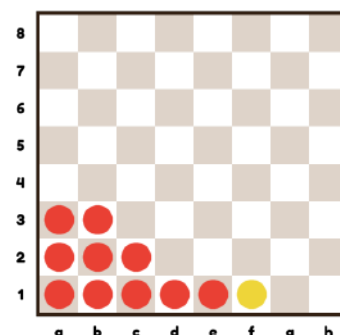


Imagen 33(a) Juego de la Moneda de Oro

#### Estrategia de Juego

La estrategia convencional al jugar juegos de Resta es ser la persona que elimine la última ficha. El giro en este juego es que la persona que quita la última fichar roja es el perdedor, no el ganador, esta es la versión miserable del juego de Resta. La mejor estrategia es seguir la estrategia ganadora convencional como si el juego se jugara solo con fichas rojas. Sin embargo, justo antes del final, no le des otra opción al rival que quitar la última ficha roja.

#### Plan Ganador

Para simplificar, ignoramos la ficha dorada y jugamos para perder el juego con fichas rojas. Observa que la disposición de las fichas rojas es la misma que en el Ejercicio 32. Por lo tanto, para tomar el control del juego, el primer jugador debe eliminar 4 fichas rojas de la primera fila. Luego, el juego sigue el árbol del juego en la Imagen 33(b), que establece las respuestas del Jugador 1 a los movimientos del Jugador 2. El Jugador 1 gana al dejar una unidad (Cuadro 10) que es alcanzada por varias rutas. El jugador 2 debe recoger la última ficha roja, después de lo cual el jugador 1 recogerá la ficha dorada. El jugador 1 alcanza una posición ganadora dejando dos pares (Cuadro 7) o tres unidades (Cuadro 8).

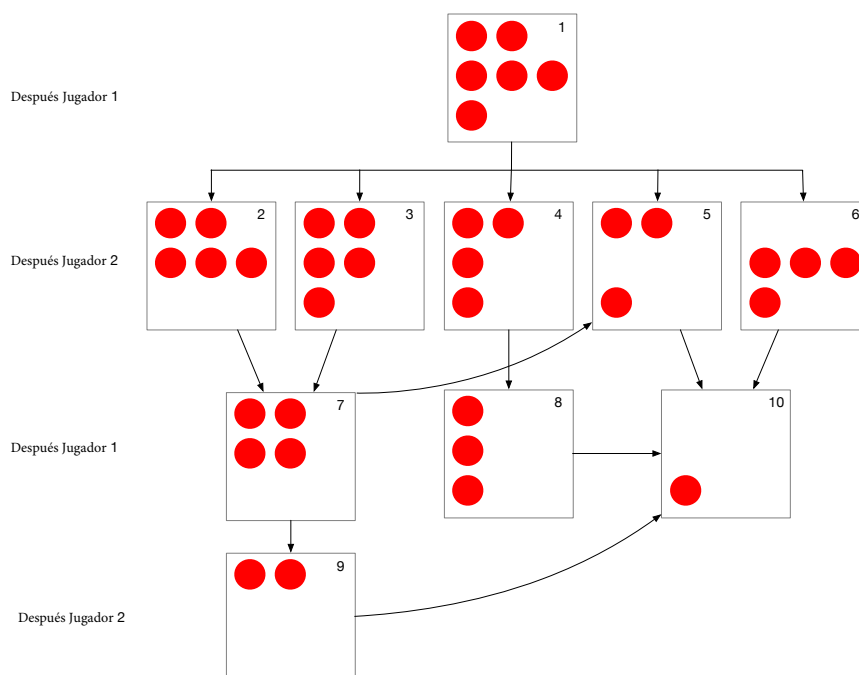


Imagen 33(b) Árbol de juego para el juego de la moneda de oro

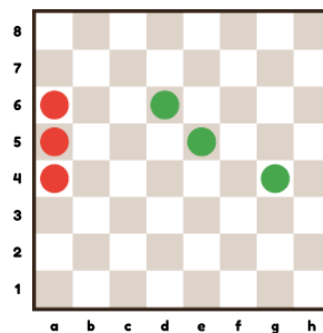
### 34. El juego de Northcott

Pareja

Edad 10+	Simetría, representación
----------	--------------------------

El jugador 1 tiene fichas en a4, a5 y a6 y el jugador 2 tiene fichas en g4, f5 y e6.

Moviéndose alternativamente, cada jugador mueve una de sus fichas de colores a lo largo de la fila cualquier número de movimientos hacia su oponente. No se permiten capturas ni saltos. La última persona en mover es el ganador. ¿Quién gana?



*Juego de Northcott*

#### Método de Solución

Este ejercicio es equivalente a Nim (Ejercicio 32) pero con espacios que representan fichas. La distancia horizontal entre cada una de las fichas de color diferente es  $\{2,3,5\}$ . Cada movimiento reduce la distancia, equivalente a eliminar una ficha en Nim. La estrategia de juego es, por lo tanto, la misma que en Nim.

### 35. Juego de torres deslizantes

Pareja

Edad 10+ Simetría, paridad, trabajar hacia atrás

Coloca ocho torres blancas en el lado izquierdo del tablero y ocho torres negras en el lado derecho del tablero (Imagen 35). Estas torres solo pueden deslizarse hacia los lados, ni hacia arriba ni hacia abajo. Las torres blancas solo pueden moverse hacia la derecha y las torres negras solo pueden moverse hacia la izquierda. Capturar o saltar sobre piezas no está permitido. La última persona en mover es el ganador. ¿Quién gana?

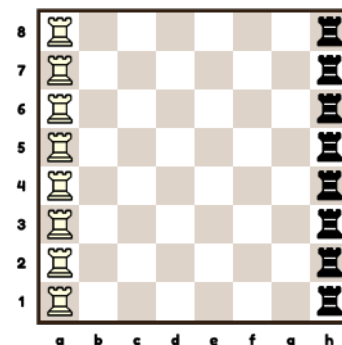


Imagen 35(a) Juego de torres deslizantes

#### Método de juego

Las filas son independientes entre sí porque las torres solo pueden moverse horizontalmente. Trabaja hacia atrás y considera una sola fila, y luego ten las otras filas en cuenta. El primer jugador puede ganar la primera fila moviendo su torre junto a la torre de su oponente. Del mismo modo, el segundo jugador puede ganar la segunda fila. Si solo hay dos filas, el segundo jugador es el último en moverse y por lo tanto gana el juego. El segundo jugador ganará siguiendo esta estrategia simétrica porque hay un número par de filas.

El primer jugador debe intentar y "perder un movimiento" para obtener simetría. Un truco es que el primer jugador intente que el segundo jugador rompa la simetría sin darse cuenta. Por ejemplo, en el primer movimiento, el primer jugador podría dejar una casilla entre su torre y la de su oponente (por ejemplo, a1-f1) tentando al segundo jugador a cerrar la brecha. Sin embargo, la respuesta correcta del segundo jugador sería reflejar el movimiento en otra fila, por ejemplo, h8-c8. Mientras el segundo jugador esté alerta, él o ella debe ganar.

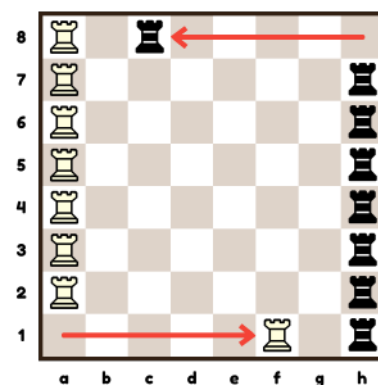


Imagen 35(b) Blanco juega 1. ♖f1 pero Negro responde 1.. ♜c8

## 36.¿Cuántas rutas? [torre]

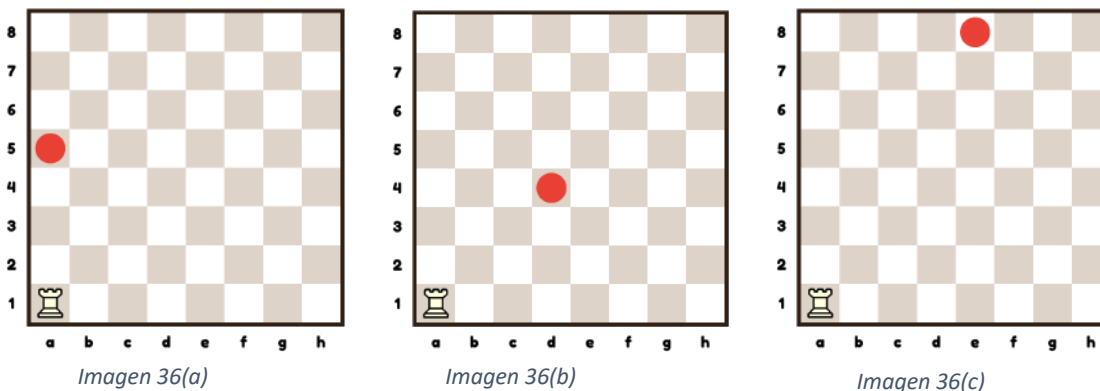
Pareja

Edad 10+ Enumeración, triangulo de Pascal

**Recursos:** Impresiones de estas posiciones con una torre en a1 y la casilla objetivo en color.

### Tarea

La torre solo puede moverse hacia el norte o hacia el este, alternando la dirección en cada movimiento. Calcula cuántas rutas diferentes hay para que llegue la torre:



### Preguntas introductorias

- ¿Por qué crees que la torre solo puede moverse al Norte o al Este? Para que la torre se acerque más a la casilla objetivo en cada movimiento. De lo contrario, podría haber muchas maneras de llegar allí.
- ¿Por qué es importante alternar la dirección en cada movimiento? Estamos buscando diferentes rutas, pero los movimientos subsiguientes en la misma dirección serían parte de la misma ruta.

¿De cuántas maneras puede llegar la torre a a5 desde a1? (Imagen 36(a))

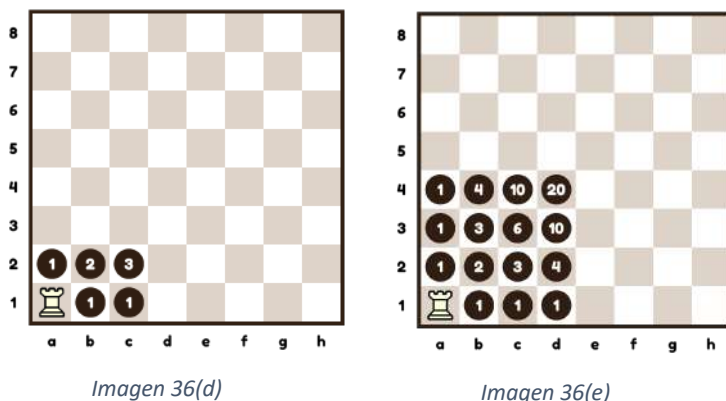
Como alterna la dirección en cada movimiento, solo hay una ruta, el movimiento único de a1 a a5.

### Método de Solución

- Comenzar desde la posición original. Para cada posición posible de la torre, cuenta el número de formas en que puede alcanzar esa casilla y escribe ese número en ella.
- Truco de resolución: busca las casillas vecinas en la dirección de donde podría haber venido la torre. Por ejemplo, para que la torre alcance c2, podría haber llegado a través de b2 o c1, por lo que la suma de los números en b2 y c1 da el número total de rutas a c2; ver Imagen 36(b).
- Continúa numerando cada casilla hasta que llegues a la casilla objetivo.

### Respuestas

Hay 20 rutas a d4 como se muestra en la Imagen 36(e). Hay 330 maneras de llegar a e8.



### 37. Paseo de Torre por un tablero mutilado

Pareja

Edad 10+ Simetría, Eliminación

Retira las esquinas opuestas de un tablero de ajedrez. Coloca una torre en cualquier casilla. ¿Puede la torre visitar todas las casillas del tablero mutilado sin pasar dos veces por la misma casilla?

Esta es una versión avanzada del Ejercicio 14, el Puzzle de la Torre en la Esquina.

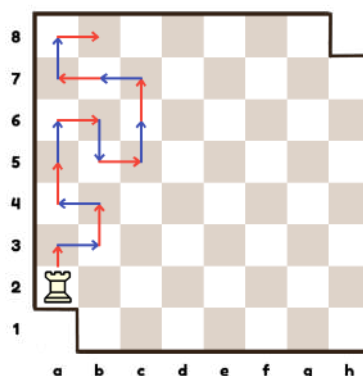
#### Método de Solución

Utilizar lápiz y papel y impresiones de un tablero. Los alumnos deben hacer una investigación no guiada primero. Deja que pidan aclaraciones sobre el problema. Espera preguntas como estas:

- *¿Importa dónde comienza la torre?*  
*No, la torre puede empezar desde cualquier casilla.*
- *¿La torre tiene que volver a la casilla inicial?*  
*No, la torre puede terminar en cualquier casilla siempre que haya visitado cada casilla una y solo una vez.*

Los alumnos no podrán encontrar una solución. Ahora puedes guiarlos hacia la prueba con los siguientes consejos y preguntas:

- *¿Cuántas casillas negras y cuántas blancas tiene que visitar la torre?*  
*30 casillas negras y 32 blancas.*
- *La torre debe proceder en movimientos de un paso en su viaje. Utilizar dos colores, rojo para impar (1º, 3º, 5º, etc.) y azul para par (2º, 4º, 6º, etc.). Se mueve como se muestra en la imagen.*
- *¿Cuántos movimientos de un paso tendría que hacer la torre para completar el recorrido?*  
*61 movimientos.*
- *¿Cuántos impares y cuántos movimientos de un solo paso serían los que tiene que hacer la torre para completar el recorrido?*  
*31 impares y 30 movimientos.*



- *Supongamos que la torre comienza en una casilla blanca, como a2. ¿Qué puedes decir sobre el color de la casilla objetivo en movimientos impares e incluso de un solo paso?*  
*La casilla objetivo de los movimientos impares es siempre una negra, mientras que la casilla objetivo de los movimientos pares es siempre blanca.*
- *Supongamos que la torre comienza en una casilla blanca, como a2. Cuenta el número de casillas negras que necesita para completar el recorrido. ¿Puedes explicar por qué la torre no lo puede completar?*  
*La casilla objetivo de los movimientos impares es siempre negra y hay 31 movimientos impares en total. Por lo tanto, hay 31 casillas de destino negras. La torre no puede completar su recorrido ya que solo necesitaría visitar 30 casillas negras.*
- *Supongamos que la torre empieza en una casilla negra, como b2. Cuenta el número de casillas blancas que necesita para completar el recorrido. ¿Puedes explicar por qué la torre no puede completarlo?*  
*La casilla objetivo de los movimientos impares es siempre una blanca y hay 31 movimientos impares en total. Por lo tanto, hay 31 casillas blancas objetivo. La torre no puede completar su recorrido, ya que tendría que visitar 32 casillas blancas.*

#### Respuesta

Por un proceso de eliminación, la respuesta es no, la torre no puede completar un recorrido por el tablero.

### 38. Puzle Zigzag con el Alfil

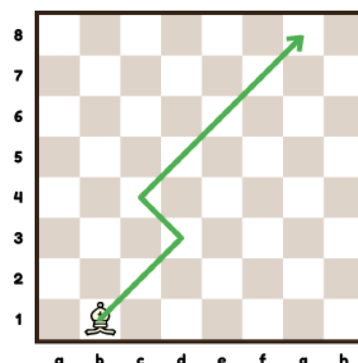
Pareja

Edad 10+ Enumeración, triangulo de Pascal

La imagen muestra al alfil cruzando el tablero diagonalmente. En cada movimiento, sube una fila y alterna la dirección de Noreste a Noroeste y viceversa. Usa lápices y copias del tablero de ajedrez.

**Preguntas:**

- (a) ¿Cuántas rutas de b1 a g8?
- (b) ¿Cuántas rutas de b1 al otro lado del tablero?
- (c) ¿Cuál es el número total de rutas de casillas blancas que comienzan en la primera fila y terminan en la octava?



Este problema tiene un método de solución similar al del Ejercicio 37. Los alumnos que entendieron la enumeración de las rutas de la torre tendrán éxito con esta tarea sobre el alfil.

**Preguntas introductorias**

- ¿Por qué crees que el alfil debe subir de fila en cada movimiento?  
Para que se acerque más a la casilla objetivo en cada movimiento.
- ¿Por qué es importante alternar la dirección en cada movimiento?  
Estamos buscando diferentes rutas, y al igual que en el Ejercicio 37, los movimientos subsiguientes en la misma dirección son parte de la misma ruta.

**Método de Solución**

Usa un tablero de ajedrez para encontrar formas para que el alfil llegue a g8 desde b1. Anota sus rutas. Aquí hay dos ejemplos:

- 1<sup>st</sup> ruta: b1→d3→c4→g8
- 2<sup>nd</sup> ruta: b1→e4→d5→g8

¿Cuántas rutas diferentes puedes encontrar? Hay un total de siete.

Para cada posición posible del alfil, cuenta el número de maneras que puede alcanzar esa casilla y escribe ese número en ella. Comenzar desde la posición original.

**Respuesta**

- (a) Hay 7 rutas desde b1 a g8.
- (b) Hay 14+28+20+7=69 rutas al otro lado; ver Imagen 38(a).
- (c) Hay 296 rutas distintas. Suma todos los números de la octava fila de las Imágenes 38 (a), 38 (b), 38 (c) y 38 (d).

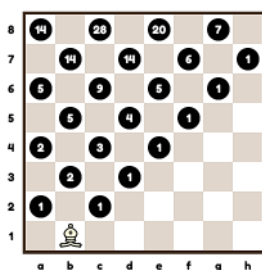


Imagen 38(a)

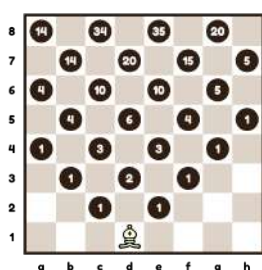


Imagen 38(b)

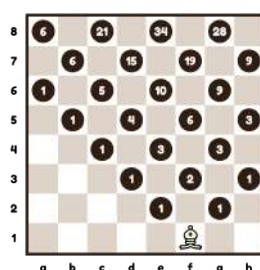


Imagen 38(c)

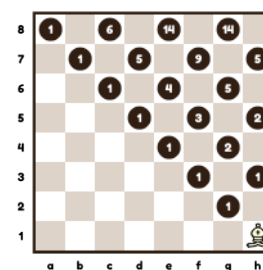


Imagen 38(d)

### 39. Puzle de cinco damas.

Dos Parejas

Edad 10+ Enumeración, triangulo de Pascal

#### Tarea

Reorganiza cinco damas de modo que ataquen cada casilla del tablero al menos una vez.

Los ataques deben cubrir todas las casillas ocupadas. Se dice que las piezas que atacan cada casilla desocupada dominan el tablero de ajedrez. Se requiere un mínimo de cinco damas para dominar-lo.

#### Pregunta introductoria

¿Cuántas casillas puede atacar una dama?

Tener en cuenta que la dama no ataca la casilla en la que se encuentra.

21, 23, 25 o 27 dependiendo de su posición. Ver el contorno de la dama en la pregunta 40.

#### Método de Solución

Coloca cinco damas en el tablero.

Marca cada casilla que está bajo el ataque de una o más damas con un lápiz.

¿Cuántas casillas libres (desocupadas y no atacadas) puedes contar?

Intenta reducir el número de casillas libres moviendo una dama a una casilla diferente.

¿Puedes reducir el número de casillas libres a cero? Si es así, entonces has resuelto la tarea.

#### Respuestas

Hay exactamente 4860 formas diferentes de realizar la tarea.

Veamos algunos arreglos interesantes:

Imagen 39(a) Todas las damas se colocan en una diagonal larga.

Imagen 39(b) Todas las damas se colocan en una diagonal que no es la diagonal larga

Imagen 39(c) Todas las damas se colocan a lo largo de una sola columna del tablero de ajedrez.

Imagen 39(d) Ninguna de las damas se ataca

Observa que en (a) - (c) los ataques también cubren todas las casillas ocupadas.

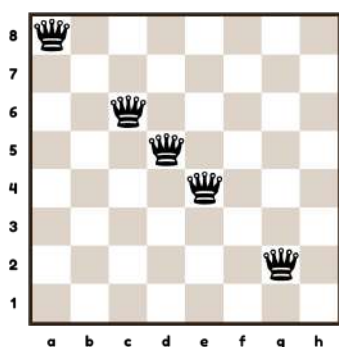


Imagen 39(a)

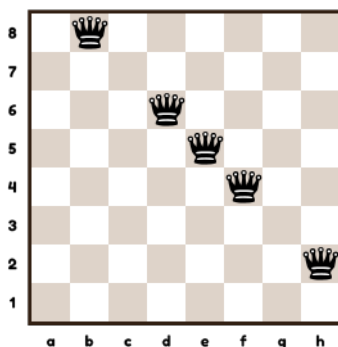


Imagen 39(b)

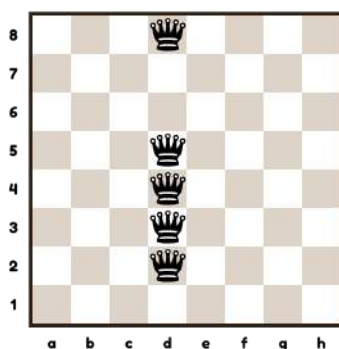


Imagen 39(c)

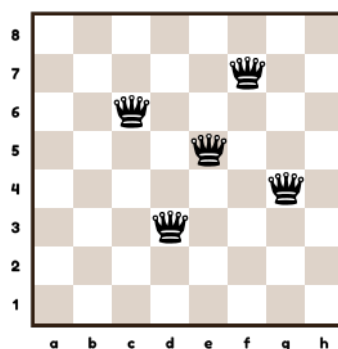


Imagen 39(d)

## 40. Dividiendo el tablero

Individual

Edad 10+ | Descomposición de formas, Prueba y Error

Imprima un tablero marcado con cruces como en la Imagen 40 (a).

### Tarea

Divide el tablero de ajedrez en ocho cuadrados más pequeños para que cada uno contenga al menos una cruz. No todos los cuadrados dibujados tienen que ser del mismo tamaño.

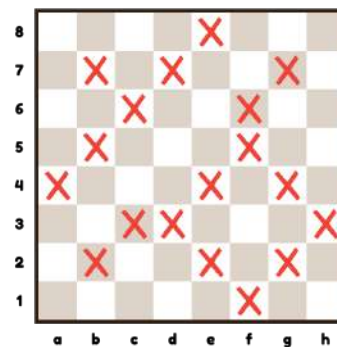


Imagen 40(a) Divide el tablero

### Método de Solución

Prueba diferentes cuadrados de tamaño de 2x2. Hay varios cuadrados potenciales que contienen una cruz. Comienza desde una esquina del tablero y luego muévete hacia abajo y de manera sistemática.

### Respuesta

Imagen 40(b) muestra la solución.

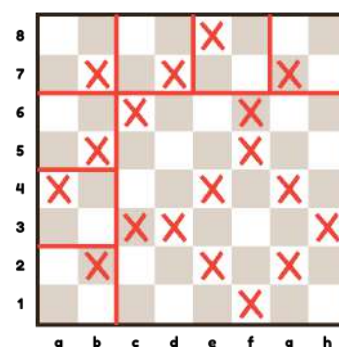


Imagen 40(b) Tablero dividido en 8 casillas

## 41. Embaldosar el tablero

Dos Parejas

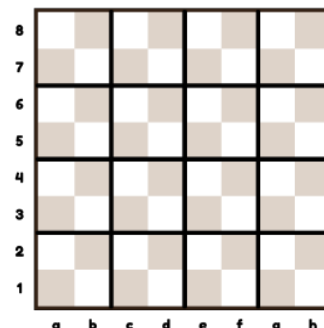
Edad 10+	Descomposición de formas, Enumeración, Prueba y Error, Medidas de área, Números cuadrados
----------	---

Mostrar un tablero de ajedrez con un mosaico de 16 cuadrados.  
 Reparte las copias de un tablero de ajedrez vacío.

**Tarea:** Muestra otras dos formas de dividir un tablero en 16 cuadrados.

### Preguntas introductorias

- Una sola casilla del tablero tiene una área de 1 unidad.  
 ¿Cuál es el área del tablero de ajedrez?  
*64 unidades.*
- Los cuadrados se dibujan en el tablero de ajedrez.  
 Haz una lista de la área de estos cuadrados.  
 ¿Qué nombre se da a estos números?  
*1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 y 64. Estos son números cuadrados.*



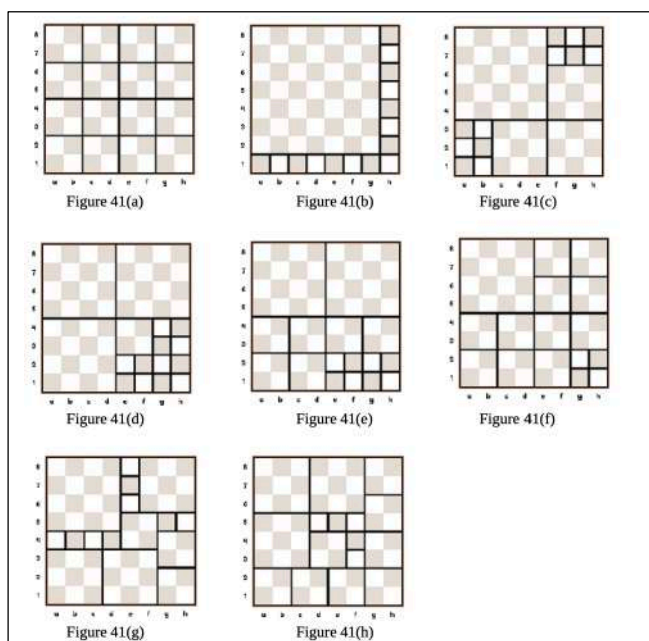
### Meterse en el problema

- Coloca el tablero de ajedrez con cuadrados. Trata de usar diferentes tamaños de cuadrados. Cuenta el número de cuadrados que has usado.
- Intenta usar 16 cuadrados para colocar en el tablero. Encuentra tantas soluciones diferentes como puedas.

### Método de Solución

Reorganizar el mismo conjunto de casillas no constituye una nueva respuesta. La tarea tiene ocho soluciones distintas. El maestro dará consejos a los alumnos hacia cada solución.

- Todos los cuadrados son del mismo tamaño: Imagen 41(a)
- Hay un cuadrado de 7x7: Imagen 41(b)
- Usar un cuadrado de 5x5 y tres de 3x3: Imagen 41(c)
- Usar tres cuadrados de 4x4: Imagen 41(d)
- Hay dos cuadrados de 4x4 y seis de 2x2: Imagen 41(e)
- Hay un cuadrado de 4x4 y once de 2x2: Imagen 41(f)
- Usar un cuadrado de 4x4 y el mismo número de 3x3 que de 2x2: Imagen 41(g)
- Hay ocho de 2x2 en esta solución: Imagen 41(h)



Edad 10+	Enumeración, Prueba y Error
----------	-----------------------------

**Tarea**

Coloca doce caballos en un tablero para que cada casilla sea atacada u ocupada.

Si no tienes suficientes caballos, usa fichas para representarlos.

**Pregunta introductoria**

¿Cuántas casillas puede atacar un caballo?

2, 3, 4, 6 o 8 según su posición. Ver el entorno del caballo en el ejercicio 10.

**Método de Solución**

1. Poner doce caballos en el tablero. Marcar cada casilla que esté bajo ataque (por uno o más caballos) con una cruz. ¿Cuántas casillas libres (desocupadas y no atacadas) puedes contar?

a) Intenta reducir el número de casillas libres moviendo un caballo a una casilla distinta.

b) ¿Puedes reducir aún más el número de casillas libres?

2. Coloca tres caballos en b6, c6 y c5. Marca cada casilla que esté bajo el ataque de uno o más caballos con una cruz. Ahora, una cuarta parte del tablero está casi completamente cubierta con caballos y cruces. Trata de usar este arreglo de caballo para cubrir el resto del tablero.

**Respuestas**

Si cada casilla está ocupada o atacada por los caballos, entonces decimos que los caballos dominan el tablero. Las dos soluciones se muestran en la Imagen 42(a) y en la Imagen 42(b).

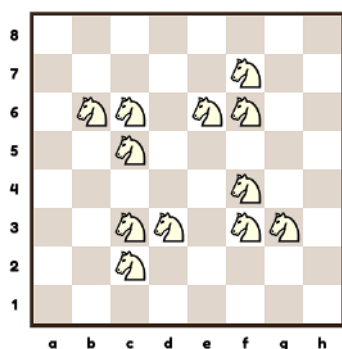


Imagen 42(a)

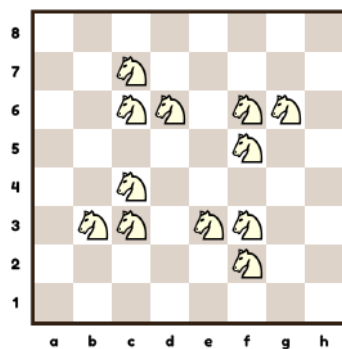


Imagen 42(b)

Observa que si reflejamos una solución alrededor del eje central horizontal o vertical, o a lo largo de las diagonales principales, obtenemos la otra solución. Además, los diagramas tienen una simetría rotacional de orden cuatro (es decir, se ven iguales cuando se giran un cuarto de vuelta o 90 grados).

Edad 10+	Enumeración, Prueba y Error
----------	-----------------------------

**Tarea:** Organiza ocho damas de modo que ninguna ataque a ninguna otra.

Puede resultar útil marcar las casillas atacadas con cruces.

Este es el problema de ajedrez y matemáticas más antiguo y famoso. Las piezas que no se atacan entre sí se llaman independientes.

### Método de Solución

- Pon dos damas en el tablero de ajedrez que no se ataquen entre sí.
- Agrega otra dama de tal manera que ninguna dama ataque a ninguna otra.
- Añadir otra dama. Comprueba que todavía no hay damas bajo ataque.
- Incrementa la cantidad de damas una a una. ¿Puedes llegar a ocho damas?

No hay una fórmula para hacer esto. Los científicos informáticos utilizan un método llamado "retroceso": cada vez que encuentre un conflicto, retroceda hasta la última ubicación y, en su lugar, intente la siguiente casilla.

En una versión simplificada de esta investigación, faltan una o dos damas de la solución y la tarea es colocar las damas restantes en las casillas correctas.

Mejor trabajar en papel con diagramas preparados.

### Respuestas

En total hay 92 posiciones que cumplen los requisitos. Si excluimos todas las rotaciones y reflexiones, solo hay 12. Algunas de estas se muestran a continuación:

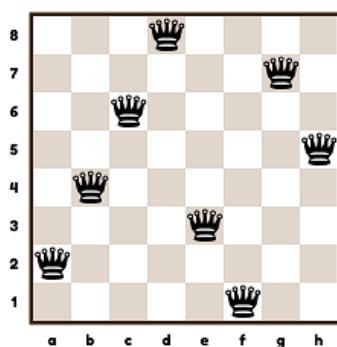


Imagen 43(a) Cuatro en fila

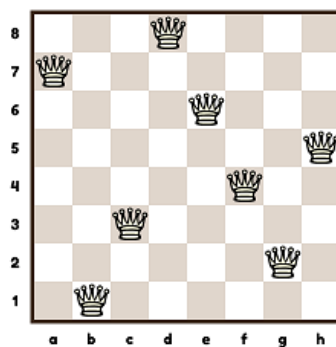


Imagen 43(b) Otra de cuatro en fila

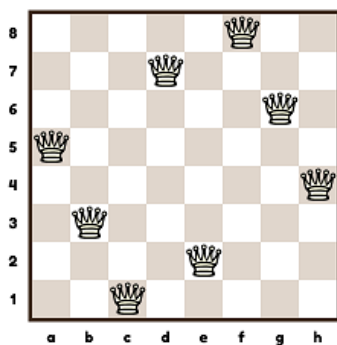


Imagen 43(c) La única solución simétrica

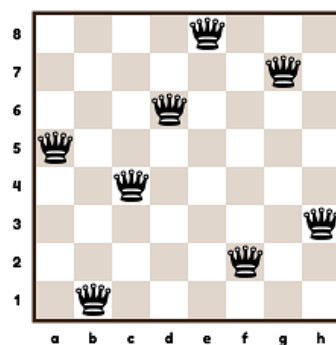


Imagen 43(d)

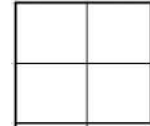
#### 44. ¿Cuántos cuadrados en un tablero de ajedrez?

Individual

Edad 10+ | Enumeración, Formas, Aritmética, Organizando la información en fichas

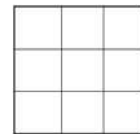
**Tarea 1:** ¿Cuántos cuadrados de todos los tamaños puedes encontrar en esta cuadrícula?

Tamaño del cuadrado	No. de cuadrados
1 por 1	4
2 por 2	1
Total	<u>5</u>



**Tarea 2:** ¿Cuántos cuadrados de todos los tamaños puedes encontrar en esta cuadrícula?

Tamaño del cuadrado	No. de cuadrados
1 por 1	9
2 por 2	<input type="text"/>
3 por 3	1
Total	<u>14</u>



#### Método de Solución

Empieza por una cuadrícula pequeña y, paso a paso, amplía el tamaño del cuadrado.

**Tarea 3:** ¿Cuántos cuadrados de todos los tamaños puedes encontrar en una cuadrícula de 4x4?

**Tarea 4:** ¿Cuántos cuadrados de todos los tamaños puedes encontrar en un tablero? Completa la cuadrícula.

Tamaño	Número de cuadrados								Total
	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	
1x1	1								1
2x2	4	1							5
3x3	9	4	1						14
4x4	16	9	4	1					30
5x5	25	16	9	4	1				55
6x6	36	25	16	9	4	1			91
7x7	49	36	25	16	9	4	1		140
8x8	64	49	36	25	16	9	4	1	204

En algún momento, el patrón puede notarse.

El número total de cuadrados geométricos en un tablero es  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$

#### Respuestas

- 1) 5
- 2) El número que falta es el 4
- 3) 30
- 4) 204

## 45. Puzzle de Puntuación del Torneo

Dos Parejas

Edad 10+ Lógica, Organizando la información en fichas

El sistema de puntuación para un torneo escolar es:

Ganar = 3 puntos      Empatar = 2 puntos      Perder = 1 punto

Cuatro alumnos (Alberto, Bridget, Cecilia y Dirk) juegan entre ellos una vez en un torneo. Te dicen que:

- 1) Bridget fue el ganador
- 2) Dirk fue el último
- 3) Cecilia anotó una victoria, un empate y una derrota
- 4) Todos los jugadores anotaron un número diferente de puntos

¿Cuántos puntos anotó Alberto?

**Pregunta introductoria** (La relevancia de esto se hará evidente más adelante).

Distribuya 10 fichas en tres cuadrados sujetos al mínimo 2 y máximo 4 por cuadrado. 4,4,2; 4,3,3 excluyendo permutaciones

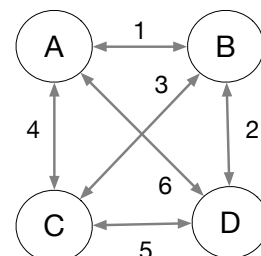
### Método de Solución

Hay soluciones pasando por todos los resultados del juego. Podemos tomar un atajo al mirar las implicaciones de la condición (4) de que cada jugador anotó un número diferente de puntos.

Establece que en un juego para 4 jugadores, hay 6 partidas (ver diagrama).

Demuestra que cada ronda resulta en 4 puntos, lo que da un total de 24 puntos en el torneo. (24 es un invariante). Queremos distribuir 24 puntos en 4 jugadores con un mínimo de 3 y un máximo de 9. Las combinaciones con puntos son:

Ganador	Segundo	Tercero	Último	Total
9	8	4	3	24
8	7	6	3	24
8	7	5	4	24



Solo uno en estas combinaciones tiene 6 puntos.

Esto da la tabla de puntos finales.

	Jugados	Puntos	Resultados
Bridget	3	8	GGE 3+3+2
Alberto	3	7	GGP 3+3+1
Cecilia	3	6	GEP 3+2+1
Dirk	3	3	PPP 1+1+1

La tabla de juego de todos es

	Bridget	Alberto	Cecilia
Alberto	Alberto = Bridget		
Cecilia	Bridget gana	Cecilia = Alberto	
Dirk	Bridget gana	Alberto gana	Cecilia gana

### Respuesta

Alberto hizo 7 puntos.

## 46. Paseo aleatorio del Rey

Pareja

Edad 10+ Enumeración, Prueba i Error, Simetría

Cada casilla de un tablero está ocupada por un rey. Cada rey se mueve de forma aleatoria a una casilla adyacente. Supongamos que cada una puede acomodar a más de un rey. ¿Cuál es el mayor número de casillas vacías que podrían quedar?

Sugerencia: usa fichas de diferentes colores. Esto asegura que todos los saltos se "registran": Si un rey salta, la ficha se pone en la casilla de llegada. Los alumnos mayores también pueden trabajar en papel con un conjunto de impresiones de tablero de ajedrez vacías.

### Preguntas introductorias

- ¿Cuál es el mayor número de reyes que pueden terminar en la misma casilla?  
*Una casilla puede estar rodeada por un máximo de ocho casillas, pero el rey residente debe saltar lejos de esta casilla, por lo que la respuesta es 8.*
- ¿Es posible que todas las casillas estén ocupadas después de los saltos?  
*Sí, lo es, por ejemplo, si se ubican los reyes vecinos en el mismo intercambio de ubicaciones.*
- ¿Es posible tener un rey aislado después de los saltos? Un rey aislado no tiene vecinos en las casillas adyacentes.  
*No, no es posible. Si hubiera un rey aislado, entonces el rey que originalmente estaba en esa casilla no habría tenido a dónde saltar.*

### Método de Solución

1. Coloca las fichas en cada casilla del tablero con el mismo color hacia arriba. Haz que cada rey salte a una casilla adyacente moviendo cada ficha a una casilla adyacente y girándola al mismo tiempo. Cuando todos los reyes han saltado cuenta el número de casillas libres en el tablero.
2. Repite 1 e intenta aumentar el número de casillas desocupadas.

### Respuesta

Estudiado el problema, los alumnos pueden llegar a la conclusión correcta de que, como máximo, 52 casillas pueden permanecer vacías, de modo que todos los reyes pueden reunirse en 12 casillas. Ver 46(a) y 46(b).

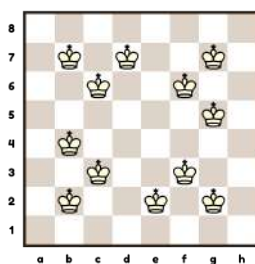


Imagen 46(a)

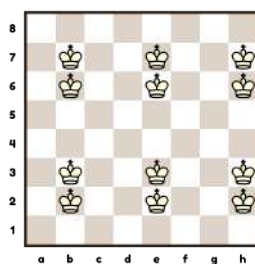


Imagen 46(b)

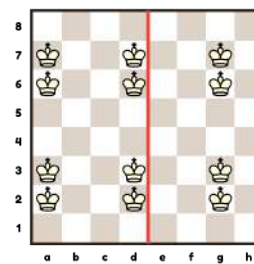


Imagen 46(c)

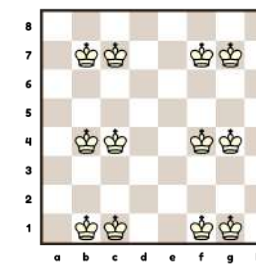


Imagen 46(d)

### Extensión

Pida a la clase que recoja tantas respuestas posibles con 52 casillas desocupadas como pueda. Discuta cómo algunos de estos están relacionados entre sí por simetría. Por ejemplo, la Imagen 46(c) es un reflejo de la Imagen 46(b) por simetría de la vertical en rojo, y la Imagen 46(d) es una rotación de 90 grados en el sentido de las agujas del reloj de la Imagen 46(b).

Algunas soluciones tienen su propia simetría: la Imagen 46(a) tiene una simetría rotacional de orden 4 alrededor del centro, mientras que la Imagen 46(b) tiene una simetría de línea con la horizontal del tablero como línea de espejo. El color de las casillas se ignora.

**47. Caminata aleatoria del Rey****Pareja**

Edad 11+	Enumeración, Proporción, Organizando la información en fichas
----------	---

Un rey se mueve aleatoriamente a partir de a8. ¿Cuál es la probabilidad de que el rey regrese a a8 después de:

- (a) Dos movimientos?
- (b) Tres movimientos?

**Preguntas introductorias**

- ¿Cuántas casillas puede mover el rey de a8?  
3: a7, b7 y b8
- ¿Cuántas casillas puede mover el rey desde a7 (y b8 por simetría)?  
5: a6, b6, b7, b8 y a8
- ¿Cuántas casillas puede mover el rey desde b7?  
8: a8, a7, a6, b6, c6, c7, c8 y b8

**Método de Solución**

(a) Completa esta tabla para tener en cuenta todas las posibilidades:

Primer movimiento a	Nº. de posibles mov. desde allí	Nº. de mov. cuando el rey vuelve a a8
a7	5	1
b7	8	1
b8	5	1
<b>TOTAL:</b>	<b>18</b>	<b>3</b>

El rey regresa a a8 tres veces de 18, es decir, 1 de cada 6 veces en promedio (16.7%).

(b) Recopila información sobre el paseo del rey en una mesa más grande:

Primeros 2 mov.	Nº. de posibles mov. desde allí	Nº. de mov. si el rey vuelve a a8
a7, a8	3	0
a7, b8	5	1
a7, b7	8	1
a7, b6	8	0
a7, a6	5	0
b7, a8	3	0
b7, b8	5	1
b7, c8	5	0
b7, c7	8	0
b7, c6	8	0
b7, b6	8	0
b7, a6	5	0
b7, a7	5	1
b8, a8	3	0
b8, a7	5	1
b8, b7	8	1
b8, c7	8	0
b8, c8	5	0
<b>TOTAL:</b>	<b>105</b>	<b>6</b>

El rey regresa a a8 seis veces de cada 105, es decir, 2 de 35 veces en promedio (5.7%).

## 48. La invención del ajedrez

Grupo

Edad 11+	Crecimiento Exponencial, Secuencia Geométrica
----------	---

Hay una leyenda sobre la invención del ajedrez. La versión moderna es esta. Cuando el inventor le mostró al rey persa su nuevo juego, el Sha quedó muy impresionado y le ofreció dos recompensas. O bien el inventor podría tener 1 millón de euros por cada casilla en el tablero de ajedrez, es decir, 64 millones de euros, o podría tener 1 centavo por la primera casilla, 2 centavos por la segunda casilla, 4 centavos por la tercera casilla, doblando cada uno, hasta sesenta y cuatro casillas. ¿Qué opción elegirías?

### Juicio a pequeña escala

Para entender el dilema del inventor, usar un tablero reducido (4x4). Rellena todos los cuadrados del tablero con granos de arroz. Los alumnos pueden «sentir» el rápido crecimiento mediante este sencillo procedimiento. La tasa de crecimiento se hace más rápida cuanto más granos de arroz obtenemos, la ilustración del crecimiento exponencial. Con una placa estándar de 8x8, obtenemos lo siguiente que es imposible de manejar manualmente.



### Pregunta intermedia

Que es mayor

- a) El total de los granos de arroz de las casillas 1-8.
- b) El número de granos de arroz de la casilla 9.

Respuesta: b)

Repita la pregunta para las comparaciones {1-16 v 17} y {1-32 v 33} con la misma respuesta.

### Método de Solución

Este ejercicio implica hacer muchos cálculos largos. Se debe utilizar una calculadora u hoja de cálculo para ahorrar tiempo y lograr precisión. La fórmula para el número de granos de arroz para  $n$  casillas es 2 elevado a  $n-1$ .

Para convertir centavos a euros, se divide por 100.

### Respuesta

La opción de doblar da una cifra mucho más alta. Aunque comienza lentamente, una vez que se cubre la mitad del tablero, la situación ha cambiado dramáticamente. En la casilla 33, el total de la duplicación ha alcanzado casi 43 millones de euros, superando a la primera opción de 33 millones de euros. Llenar el tablero completo costaría más que todo el dinero del mundo.

## 49.¿Cuántos rectángulos en un tablero de ajedrez?

Pareja

Edad 11+ Enumeración, Formas, Organizando la información en fichas

Esta es una tarea desafiante para los alumnos de primaria, por lo tanto, es mejor realizarla como una actividad dirigida por el maestro. Primero presenta esta tabla sin los números de la segunda columna:

Rectángulo tipo	No. de estos rectáng. en el tablero
1x1	8x8 = 64
1x2	7x8x2 = 112
1x3	6x8x2 = 96
1x4	5x8x2 = 80
1x5	4x8x2 = 64
1x6	3x8x2 = 48
1x7	2x8x2 = 32
1x8	1x8x2 = 16
2x2	7x7 = 49
2x3	6x7x2 = 84
2x4	5x7x2 = 70
2x5	4x7x2 = 56
2x6	3x7x2 = 42
2x7	2x7x2 = 28
2x8	1x7x2 = 14
3x3	6x6 = 36
3x4	5x6x2 = 60
3x5	4x6x2 = 48
3x6	3x6x2 = 36
3x7	2x6x2 = 24
3x8	1x6x2 = 12
4x4	5x5 = 25
4x5	4x5x2 = 40
4x6	3x5x2 = 30
4x7	2x5x2 = 20
4x8	1x5x2 = 10
5x5	4x4 = 16
5x6	3x4x2 = 24
5x7	2x4x2 = 16
5x8	1x4x2 = 8
6x6	3x3 = 9
6x7	2x3x2 = 12
6x8	1x3x2 = 6
7x7	2x2 = 4
7x8	1x2x2 = 4
8x8	1x1 = 1
<b>Total:</b>	<b>1296</b>

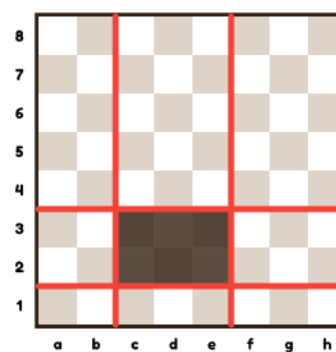


Imagen 49(a)

### Método de Solución

Pida a parejas de alumnos que recorten uno o más de los tipos de rectángulos del papel. Su tarea es colocar esto en el tablero de ajedrez de la forma más diferente posible y registrar su resultado. Anímelos a encontrar una manera sistemática de hacer el conteo.

Tener cuidado con las trampas, como contar  $axb$  pero no contar con rectángulos  $bx a$ . Recoger todas las respuestas y corregir si es necesario.

El número total de rectángulos que se pueden encontrar en un tablero de ajedrez es 1296.

Método de solución avanzado: un rectángulo está delimitado por dos líneas verticales y dos horizontales, como se muestra en la Imagen 49 (a). Cada rectángulo está determinado únicamente por un par de líneas verticales y horizontales. Hay tantos pares horizontales como verticales, por lo que es suficiente contar el número total de pares verticales que se pueden dibujar.

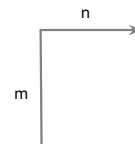
Hay 9 formas de elegir la primera línea vertical y 8 formas de elegir la segunda. Hemos contado dos veces cada par, por lo que el número de pares verticales es  $9 \times 8 / 2 = 36$ . También hay 36 pares horizontales. Para cada par vertical podemos elegir cualquiera de los 36 pares horizontales, por lo tanto, hay  $36 \times 36$  opciones, lo que da un total de 1296 rectángulos.

## 50. Problema de Leaper

Pareja

Edad 11+ Enumeración, Simetría, Ángulos

Los saltadores son piezas que se mueven  $m$  casillas en una dirección y luego  $n$  en ángulo recto. El único saltador utilizado en el ajedrez es el caballo, que es un saltador (2,1).



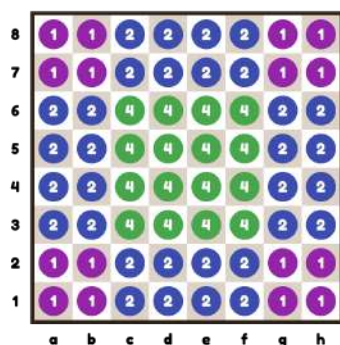
### Tareas

(a) Produzca un contorno de energía para cada uno de los saltadores siguientes:

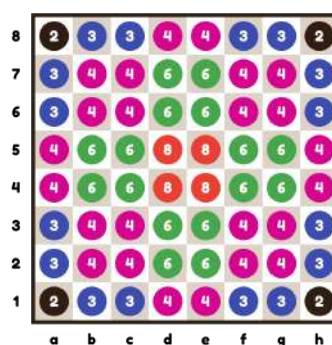
- (2,1) Caballo
- (2,2) Alfil
- (3,1) Camello
- (3,2) Cebra [opcional]
- (3,3) Tripper [opcional]
- (4,1) Jirafa [opcional]

Sugerencia: fíjese en algunos ejemplos de contornos de potencia de pieza (ejercicio 10).

(b) Identifique los saltadores definidos por los mapas de contorno a continuación.



50(a)



50(b)

### Método de Solución

Compare visualmente los diagramas dibujados en (a) con los contornos dados en (b).

Solución

- (a) Alfil (2,2)
- (b) Camello (3,1)